普通高等教育“十二五”规划教材

数学分析选讲

主　编　黄金莹　谢　颖
副主编　赵　宇　董庆超
主　审　宋　文



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材


ISBN 978-7-5605-6274-2

责任编辑　田　华
封面设计　阎　亮

定价：32.80元

普通高等教育“十二五”规划教材

数学分析选讲

主　编　黄金莹　谢　颖

副主编　赵　宇　董庆超

主　审　宋　文



西安交通大学出版社

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

全书分为四章，包括函数极限与连续、级数与无穷积分、函数的可微性、函数的可积性。通过列举数学分析经典例题的多种解法(一题多解问题)以及围绕数学分析基本概念和重要结论开展应用技巧的集中训练(一解多题问题)，系统地回顾了数学分析的理论知识，并注重各个知识点之间的交叉融合，体现了数学分析的系统性和严谨性。选讲例题的综合性和技巧性较强，不局限于教材章节顺序，难度适中，可用于本科数学和理工科各专业高年级学生考研复习及青年教师授课选题参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲/黄金莹，谢颖主编. —西安：西安交通大学出版社，2014.7
ISBN 978-7-5605-6274-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①黄… ②谢… Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教学参考教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 113153 号

书　　名 数学分析选讲
主　　编 黄金莹　谢　颖
责任编辑 田　华

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 北京京华虎彩印刷有限公司

开　　本 727mm×960mm　1/16　**印张** 14.125　**字数** 352 千字
版次印次 2014 年 7 月第 1 版　2014 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-6274-2/O·467
定　　价 32.80 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

前　言

本书是为较系统地学过一遍数学分析的人而编写的，可供本科数学专业和理工科各专业高年级学生考研复习及青年教师授课选题参考之用。本书在编排顺序上不同于通常教材那样按部就班，我们将具有相同理论背景的知识点或者性质结论可以相互比照的知识点放在一起，以达到综合应用的目的。

本书采用两种方式开展所谓的“数学分析选讲”，一是列举数学分析重要定理和经典例题的多种证法，从中体会多角度思考数学问题的发散思维方法，据此深刻理解问题的内涵本质，即一题多解问题；二是着眼于数学分析某些重要概念和结论，开展集中应用训练，从而总结这些重要概念和结论的应用思想和应用技巧，即一解多题问题。这两种方式的目的是使读者进一步熟悉数学分析的知识点，并对基本的概念、定理加以灵活应用，同时我们想通过这样的方式培养读者的解题兴趣，丰富读者的解题技巧。

为了实现上述目的，作者结合多年教学的积累，同时参考近几年出版的数学分析类的教材及教辅，历时五年，终于使本书以读者即将看到的模样付梓印刷，欣慰之余，也有必要说明几点。

第一，一题多解的产生及作用。对于一道较为具体的例子，通常是命题者在从事教学或研究时思考总结演算的结果，有其自己的考察目的。一种解法只要把它解决了就可以，通常不必追求另外的解法，否则会有过分演绎的嫌疑。而一题多解的产生则是众多解题者在解题过程中，依据自身的知识背景和数学习惯，甚至是“灵光一闪”，从不同的数学视角审视同一数学问题的结果。适当的一题多解，能够使知识点相互支撑相互印证，起到融会贯通的作用。本书所呈现的一题多解题目，很大程度上旨在总结所给类型题的解题方法，从而省却了对某类型题解题方法的文字性概括，同时一题多解题目还兼具了开拓思路，体现数学分析严谨性、系统性的作用。

第二，如何看待一解多题。在本书中我们经常会围绕某一重要定理来列举它的应用，例如本书对区间套定理、柯西收敛准则、微分中值定理等，我们都作了针对性的习题演练。这些结论在数学分析中处于地基和框架的作用，数学分析这座大厦建设质量的优劣，就取决于这些地基和框架的强度。当我们在框架之间再搭建

起一个个房间，按章节讨论不同的课题时，这些结论将成为有力的工具，支撑起数学分析这座宏伟的建筑。

第三，关于题目和解法的选材。本书题目的选取有如下比例：自编题目大概占到20%，80%的题目选自于所参考的教辅或教材。本书一题多解的题目，30%的解法为作者给出，70%为作者收集整理。一解多题是作者对数学分析典型问题的总结和梳理。此外，我们适量地配备了思考题及答案，供读者参考习作。

本书第1章、第3章的前两节及附录内容由佳木斯大学理学院黄金莹编写，第2章全部和第3章的后两节内容由哈尔滨职业技术学院谢颖编写，第4章和思考题答案由佳木斯大学理学院赵宇、董庆超共同编写，赵宇和董庆超还分别负责了打印和校对工作。哈尔滨师范大学数学科学学院院长宋文教授通篇审阅本书，并提出许多宝贵意见，在此特向老师表示衷心的感谢。此外，西安交通大学出版社田华编辑对本书的出版给予极大帮助，特致谢意。

黄金莹
于佳木斯大学理学院
2014年1月1日

目　录

第 1 章　函数极限与连续

数学分析的任务是研究函数的分析性质 —— 连续性、可微性、可积性，这三种性质的刻划必须借助于极限（甚至函数自身的表示也要借助于极限），因此极限作为数学分析的研究工具贯穿始终. 本章涵盖的内容包括实数的完备性、数列极限、函数极限、函数的连续性与一致连续性.

1.1　确界与振幅

本节综合给出确界的性质. 首先，介绍有关上（下）确界的验证方法，然后介绍了与确界密切相关的一个概念 —— 函数振幅，它在刻划函数连续性与可积性方面有着很好的应用.

1.1.1　确界概念及性质

定义 1.1.1　设 S 是 $\mathbf{R}$ 的一个数集，若数 η 满足：

（ⅰ）对 $\forall x \in S$，有 $x \leqslant \eta$；（ⅱ）对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists x_0 \in S$，使得 $x_0 > \eta - \varepsilon$，则称数 η 为数集 S 的上确界，记作 $\sup S = \eta$.

对于（ⅱ）还可以有另外两种等价叙述，即

（ⅱ_1）对 $\forall \alpha < \eta$，$\exists x_0 \in S$，使得 $x_0 > \alpha$；

（ⅱ_2）对 S 的任何上界 M，都有 $\eta \leqslant M$.

若数 ξ 满足：

（ⅰ）对 $\forall x \in S$，有 $x \geqslant \xi$；（ⅱ）对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists x_0 \in S$，使得 $x_0 < \xi + \varepsilon$，则称数 ξ 为数集 S 的下确界，记作 $\inf S = \xi$.

确界定理：非空有上（下）界数集必有唯一的上（下）确界.

确界性质由下面例 1.1.1 给出.

例 1.1.1　设 A，B 均为非空有界数集，a，c 为常数，定义：

$A^{-}=-A=\{-x \mid x\in A\}$；$cA=\{cx \mid x\in A\}$；$AB=\{xy \mid x\in A,y\in B\}$；

$a+A=\{a+x \mid x\in A\}$；$A+B=\{x+y \mid x\in A,y\in B\}$.

求证：(1) 若 $A\subseteq B$，则 $\inf B\leqslant \inf A\leqslant \sup A\leqslant \sup B$；

(2) 若对 $\forall x\in A,\forall y\in B$，有 $x\leqslant y$，则 $\sup A\leqslant \inf B$；

若对 $\forall x\in A,\exists y\in B$，有 $x\leqslant y$，则 $\sup A\leqslant \sup B$；

若对 $\forall y\in B,\exists x\in A$，有 $x\leqslant y$，则 $\inf A\leqslant \inf B$；

(3) $\sup A\cup B=\max\{\sup A,\sup B\}$，$\inf A\cup B=\min\{\inf A,\inf B\}$；

$\max\{\inf A,\inf B\}\leqslant \inf A\cap B\leqslant \sup A\cap B\leqslant \min\{\sup A,\sup B\}$；

(4) $\inf A^{-}=-\sup A$，$\sup A^{-}=-\inf A$；

(5) 若 $c\geqslant 0$，则 $\inf cA=c\inf A$，$\sup cA=c\sup A$；

若 $c\leqslant 0$，则 $\inf cA=c\sup A$，$\sup cA=c\inf A$；

(6) 设 $a\in\mathbf{R}$，则 $\inf(a+A)=a+\inf A$，$\sup(a+A)=a+\sup A$；

(7) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$，$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$；

(8) 若 A,B 中数均非负，则 $\inf AB=\inf A\cdot\inf B$，$\sup AB=\sup A\cdot\sup B$.

证明 仅以(7)(8)为例，对于(7) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$ 我们可以考虑以下三种方法.

证法一 要证 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$，即证 $\sup A+\sup B$ 是 $A+B$ 的上确界.

(i) $\forall x\in A,\forall y\in B$，有 $x\leqslant \sup A$，$y\leqslant \sup B$，从而 $x+y\leqslant \sup A+\sup B$.

(ii) 对 $\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in A,\exists y_0\in B$，使得 $x_0>\sup A-\frac{\varepsilon}{2}$，$y_0>\sup B-\frac{\varepsilon}{2}$，从而 $\exists x_0+y_0\in A+B$，使得 $x_0+y_0>\sup A+\sup B-\varepsilon$.

故 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

证法二 (i) 同上

(ii) 设 $\forall\alpha<\sup A+\sup B$，(这里的 α 相当于证法一中的 $\sup A+\sup B-\varepsilon$)，

$$\alpha'=\sup A-\frac{\sup A+\sup B-\alpha}{2}<\sup A,$$

$$\alpha''=\sup B-\frac{\sup A+\sup B-\alpha}{2}<\sup B,$$

从而 $\exists x_0\in A,\exists y_0\in B$，使得 $x_0>\alpha'$，$y_0>\alpha''$，从而 $x_0+y_0>\alpha'+\alpha''=\alpha$，

故 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

证法三　要证 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$，即证

(1) $\sup(A+B)\leqslant\sup A+\sup B$ 且 (2) $\sup(A+B)\geqslant\sup A+\sup B$.

事实上

(1) $\forall x\in A,\forall y\in B$，有 $x\leqslant\sup A, y\leqslant\sup B$，从而 $x+y\leqslant\sup A+\sup B$，即 $\sup A+\sup B$ 是 $A+B$ 的一个上界，故 $\sup(A+B)\leqslant\sup A+\sup B$.

(2) $\forall y\in B$，有 $y+A\subseteq A+B$，根据结论(1)得，$\sup(y+A)\leqslant\sup(A+B)$. 又根据结论(6)得，$y+\sup A=\sup(y+A)$，故 $\forall y\in B, y+\sup A\leqslant\sup(A+B)$，

即 $\sup(A+B)$ 是 $B+\sup A$ 的一个上界，于是 $\sup(B+\sup A)\leqslant\sup(A+B)$，

又 $\sup(B+\sup A)=\sup A+\sup B$，于是 $\sup(A+B)\geqslant\sup A+\sup B$.

对于(8) $\inf AB=\inf A\cdot\inf B$ 也可以类似考虑.

证法一　要证 $\inf AB=\inf A\cdot\inf B$，即证 $\inf A\cdot\inf B$ 是 AB 的下确界.

(i) $\forall x\in A,\forall y\in B$，有 $x\geqslant\inf A\geqslant 0, y\geqslant\inf B\geqslant 0$，从而 $xy\geqslant\inf A\inf B$.

(ii) 对 $\forall\varepsilon>0$，记 $\varepsilon'=\dfrac{-(\inf A+\inf B)+\sqrt{(\inf A+\inf B)^2+4\varepsilon}}{2}$，

则 $\varepsilon'>0$，且 $\exists x_0\in A,\exists y_0\in B$，使得 $x_0<\inf A+\varepsilon', y_0<\inf B+\varepsilon'$，从而，

$\exists x_0y_0\in AB$，使得 $x_0y_0<(\inf A+\varepsilon')(\inf B+\varepsilon')=\inf A\inf B+\varepsilon$.

故 $\inf AB=\inf A\cdot\inf B$.

证法二　要证 $\inf AB=\inf A\cdot\inf B$，即证

(1) $\inf AB\geqslant\inf A\cdot\inf B$ 且 (2) $\inf AB\leqslant\inf A\cdot\inf B$.

事实上

(1) $\forall x\in A,\forall y\in B$，有 $x\geqslant\inf A, y\geqslant\inf B$，从而 $xy\geqslant\inf A\inf B$，即 $\inf A\inf B$ 是 AB 的一个下界，故 $\inf AB\geqslant\inf A\cdot\inf B$.

(2) $\forall y\in B$，有 $yA\subseteq AB$，根据结论(1)得，$\inf yA\geqslant\inf AB$；又根据结论(5)得，$\inf yA=y\inf A$，故 $\forall y\in B, y\inf A\geqslant\inf AB$，

即 $\inf AB$ 是集 $B\inf A$ 的一个下界，故 $\inf AB\leqslant\inf(B\inf A)$，又 $\inf(B\inf A)=\inf A\inf B$，故 $\inf AB\leqslant\inf A\cdot\inf B$.

例 1.1.1 中其它关于确界等式的题目可适当选择上述三种方法之一，特别是方法三，将等式转化为两个关于确界的不等式，而关于确界不等式的题目则只需注

意将题目变形为“$\sup S \leqslant \eta$”(这只需证 η 是集 S 的一个上界)或“$\inf S \geqslant \xi$”(这只需证 ξ 是集 S 的一个下界).

例如:要证明 $\inf cA = c\inf A$,其中 $c \geqslant 0$.

不妨设 $c > 0$,要证 $\inf cA = c\inf A$,即证(1)$\inf cA \leqslant c\inf A$ 且(2)$\inf cA \geqslant c\inf A$.
对于(2)$\inf cA \geqslant c\inf A$,相当于证 $c\inf A$ 是 cA 的一个下界.
对于(1)$\inf cA \leqslant c\inf A$,向“$\inf S \geqslant \xi$”形式转化,就是 $\inf A \geqslant \frac{1}{c}\inf cA$,相当于证 $\frac{1}{c}\inf cA$ 是 A 的一个下界.

1.1.2 函数振幅

定义 1.1.2 设函数 $f(x)$ 在数集 A 有定义,$\omega(f,A) = \sup\limits_{\forall x,y\in A} |f(x) - f(y)|$ 称为函数 $f(x)$ 在数集 A 的振幅.

特别地,$f(x) = x$ 在数集 A 的振幅 $d(A) = \sup\limits_{\forall x,y\in A} |x - y|$,又称为数集 A 的直径.

$f(x)$ 在数集 A 的振幅就是函数 $f(x)$ 在数集 A 上的值域 $f(A)$ 的直径.

在几何上,函数 $f(x)$ 在数集 A 的振幅可以这样理解:函数图像在纵坐标方向上下震荡的幅度或者是数集 $f(A)$ 中任意两点的最远距离(当然未必可达,例如有限的开区间 (a,b) 与闭区间 $[a,b]$ 的直径都是 $b-a$,但前者是找不到这样两个点使得其距离为 $b-a$ 的).

数集 A 有界当且仅当数集 A 的直径 $d < +\infty$;

$f(x)$ 在数集 A 有界当且仅当 $\omega(f,A) < +\infty$.(请读者自证一下!)

例 1.1.2 设函数 $f(x)$ 在数集 A 有界,则 $f(x)$ 在数集 A 的振幅的等价形式为 $\omega(f,A) = \sup\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\} - \inf\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}$.

证明 首先证明 $\sup\limits_{\forall x,y\in A} |f(x) - f(y)| = \sup\limits_{\forall x,y\in A}\{f(x) - f(y)\}$.

令 $B = \{|f(x) - f(y)| \mid \forall x,y \in A\}$,$C = \{f(x) - f(y) \mid \forall x,y \in A\}$.

因 $\forall x,y \in A$,$|f(x) - f(y)| = \begin{cases} f(x) - f(y), f(x) \geqslant f(y) \\ f(y) - f(x), f(x) < f(y) \end{cases}$,故 $B \subseteq C$,

进而由例 1.1.1(1) 知,$\sup B \leqslant \sup C$.

又 $\forall x,y\in A, f(x)-f(y)\leqslant |f(x)-f(y)|$，由例 1.1.1(2) 知，$\sup B\geqslant \sup C$，

从而 $\sup\limits_{\forall x,y\in A}|f(x)-f(y)|=\sup\limits_{\forall x,y\in A}\{f(x)-f(y)\}$.

其次证明 $\sup\limits_{\forall x,y\in A}\{f(x)-f(y)\}=\sup\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}-\inf\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}$.

由例 1.1.1(4)、(7) 知，

$$\begin{aligned}\sup_{\forall x,y\in A}\{f(x)-f(y)\}&=\sup_{\forall x,y\in A}\{f(x)+[-f(y)]\}\\&=\sup_{\forall x\in A}\{f(x)\}+\sup_{\forall x\in A}\{-f(x)\}\\&=\sup_{\forall x\in A}\{f(x)\}-\inf_{\forall x\in A}\{f(x)\}.\end{aligned}$$

或证：$\forall x,y\in A$，有 $f(x)\leqslant\sup\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}$ 与 $-f(y)\leqslant-\inf\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}$，进而

$$f(x)-f(y)\leqslant\sup_{\forall x\in A}\{f(x)\}-\inf_{\forall x\in A}\{f(x)\}.$$

$\forall\varepsilon>0, \exists x_0\in A, y_0\in A$，使得

$$f(x_0)>\sup_{\forall x\in A}\{f(x)\}-\frac{\varepsilon}{2}, f(y_0)<\inf_{\forall x\in A}\{f(x)\}+\frac{\varepsilon}{2},$$

进而 $f(x_0)-f(y_0)>\sup\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}-\inf\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}-\varepsilon$，由确界定义知，

$\sup\limits_{\forall x,y\in A}\{f(x)-f(y)\}=\sup\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}-\inf\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}$.

下面的例 1.1.3、例 1.1.4 作为振幅概念的应用，利用振幅分别刻划函数在一点处的极限、连续以及在闭区间的一致连续.

例 1.1.3　(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega(f,\mathring{U}(a,\delta))=0$；

(2) $f(x)$ 在 a 连续当且仅当 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega(f,U(a,\delta))=0$.

证明　(1) 必要性

因 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在，由 Cauchy(柯西) 收敛准则知，

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon)>0, \forall x,y\in\mathring{U}(a,\delta(\varepsilon))，有 |f(x)-f(y)|<\varepsilon,$$

进而
$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon)>0, \omega(f,\mathring{U}(a,\delta(\varepsilon)))\leqslant\varepsilon,$$

而对于 $\forall\delta: 0<\delta<\delta(\varepsilon)$，有 $\mathring{U}(a,\delta)\subset\mathring{U}(a,\delta(\varepsilon))$，

进一步就有
$$\omega(f,\mathring{U}(a,\delta))\leqslant\omega(f,\mathring{U}(a,\delta(\varepsilon)))\leqslant\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega(f,\mathring{U}(a,\delta))=0$.

充分性

因 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega(f,\mathring{U}(a,\delta))=0$，故

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{对 } \forall \delta: 0 < \delta < \delta(\varepsilon), \text{有 } \omega(f, \mathring{U}(a,\delta)) < \varepsilon,$$

从而 $\forall x, y \in \mathring{U}(a,\delta)$，有 $|f(x) - f(y)| \leqslant \sup\limits_{\forall x,y \in \mathring{U}(a,\delta)} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$，

由 Cauchy 收敛准则知，$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 存在.

(2) 只需将结论(1) 证明过程中的空心邻域改为实心邻域即可.

例 1.1.4 函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上一致连续充要条件是对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，对任意的分法 T：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b,$$

当 $\lambda(T) < \delta$ 时，对 $\forall k = 1,2,\cdots,n$，有 $\omega_k < \varepsilon$.

其中 $\lambda(T) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}\{x_k - x_{k-1}\}$，$\omega_k = \omega(f, [x_{k-1}, x_k])$

$$= \sup_{\forall x,y \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x) - f(y)|.$$

证明 必要性

因函数 $f(x)$ 在$[a,b]$一致连续，根据定义就有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a,b], |x - y| < \delta, \text{有 } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

于是对任意的分法 T：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b,$$

当 $\lambda(T) < \delta$ 时，对 $\forall k = 1,2,\cdots,n$，有

$$\omega_k = \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) = \sup_{\forall x,y \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x) - f(y)| = M_k - m_k < \varepsilon,$$

其中 M_k 为 $f(x)$ 在$[x_{k-1}, x_k]$的最大值，m_k 为 $f(x)$ 在$[x_{k-1}, x_k]$的最小值.

充分性

已知对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，对任意的分法 T：$\lambda(T) < \delta$，$\forall k = 1,2,\cdots,n$，有 $\omega_k < \varepsilon$.

任取 $x, y \in [a,b]$，且 $|x - y| < \delta$，总存在以所取的 x, y 为分点的分法 T，且 $\lambda(T) < \delta$，进而 $\forall k = 1,2,\cdots,n$，有 $\omega_k < \varepsilon$，进一步就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$，即 $f(x)$ 在$[a,b]$一致连续.

例 1.1.4 被称为振幅一致小定理，利用它并结合可积准则可以获得连续函数可积性.

例 1.1.5 若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$可积.

证明 因函数 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，从而函数 $f(x)$ 在$[a,b]$一致连续.

根据例 1.1.4 知,

对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,对任意的分法 $T:\lambda(T) < \delta, \forall k = 1,2,\cdots,n$,有 $\omega_k < \varepsilon$.

于是,$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,对任意的分法 $T:\lambda(T) < \delta, \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon(b - a)$,即 $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = 0$,由可积准则知 $f(x)$ 在$[a,b]$可积.

思考题 1.1

1. 设函数 $f(x),g(x)$ 在数集 A 有界,即 $\exists M,N > 0$,对 $\forall x \in A$,有 $|f(x)| \leqslant M$, $|g(x)| \leqslant N$,证明:

$$\omega(f \pm g, A) \leqslant \omega(f,A) + \omega(g,A);$$

$$\omega(fg, A) \leqslant N\omega(f,A) + M\omega(g,A).$$

2. 设 f,g 为 D 上有界函数,证明:$\inf_{x\in D} f(x) + \inf_{x\in D} g(x) \leqslant \inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\} \leqslant \inf_{x\in D} f(x) + \sup_{x\in D} g(x) \leqslant \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\} \leqslant \sup_{x\in D} f(x) + \sup_{x\in D} g(x)$

1.2　实数完备性

本节围绕实数完备性定理展开讨论,除了回顾实数完备性定理的基本内容之外,我们还强化了区间套定理、单调有界定理的应用,特别是用区间套定理将数学中的三个重要常数——e、c(欧拉常数)、π“套”了出来.

1.2.1　实数完备性定理的基本内容

实数完备性定理包括七个等价命题。

(1) 确界定理:非空有上(下)界数集必有唯一的上(下)确界(实数集 **R** 及 **R** 的子集简称为数集).

(2) 单调有界定理:单调增加有上界(或单调减少有下界)的数列必收敛.

(3) Cauchy 收敛准则:

$\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, \forall p \in N_+$,有 $|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$.

(4) 区间套定理:闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足条件:

$[a_n,b_n] \supset [a_{n+1},b_{n+1}], n = 1,2,\cdots$,即 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant$

$b_2 \leqslant b_1$

以及$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$,则称$\{[a_n, b_n]\}$是一个闭区间套,此时必存在唯一的$\xi \in [a_n, b_n]$, $n = 1,2,\cdots$.

(5) 有限覆盖定理:

设H为闭区间$[a,b]$的一个无限开覆盖,则H中必有有限多个开区间覆盖$[a, b]$.

(6) 聚点定理:有界无限数集至少有一个聚点.

(7) 致密性定理:有界点列必有收敛子列.

例 1.2.1 用其它实数完备性定理证明单调有界定理:若$\{x_n\}$单调增加有上界,则$\{x_n\}$收敛.

证法一(用区间套定理)

设$\{x_n\} \subset [a,b]$,对$[a,b]$二等分得$[a,\frac{a+b}{2}]$,$[\frac{a+b}{2},b]$.

若$[\frac{a+b}{2},b]$含$\{x_n\}$中的项,则记$[\frac{a+b}{2},b] = [a_1,b_1]$,否则记$[a,\frac{a+b}{2}] = [a_1,b_1]$.

对$[a_1,b_1]$实施同样的步骤,优先记$[\frac{a_1+b_1}{2},b_1] = [a_2,b_2]$,否则记$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}] = [a_2,b_2]$.

如此下去,得到闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$,且由数列$\{x_n\}$的单调性可得如下性质:

$\forall n \in N_+$,$[a_n,b_n]$中含有数列$\{x_n\}$的几乎所有项.由闭区间套定理知,存在唯一一点$c \in [a_n,b_n]$,$n = 1,2,\cdots$,且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

于是,$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in N_+$, $\forall n > N$,有$[a_n,b_n] \subset U(a,\varepsilon)$,从而$U(a,\varepsilon)$含有数列$\{x_n\}$的几乎所有项,即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

证法二(用确界定理)

单调增加有上界数列$\{x_n\}$构成非空有界数集,仍用$\{x_n\}$表示该数集(相同项为一个元素).由确界定理知,$\sup\{x_n\}$存在,设$\sup\{x_n\} = c$.

由上确界定义知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in N_+$,使得$c - \varepsilon < x_N$,

于是, 对$\forall n > N$,有$c - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant c < c + \varepsilon$,

即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

证法三(用有限覆盖定理)

(反证法)假设$\{x_n\}$不存在极限,则对于包含$\{x_n\}$的闭区间$[a,b]$中的任意一点都不会是$\{x_n\}$的极限,即$U(x,\varepsilon_x)$之外含有数列$\{x_n\}$的无限多项,再由数列的单调性可知$\{x_n\}$的几乎所有项在$U(x,\varepsilon_x)$之外,邻域$U(x,\varepsilon_x)$之内只能含有数列$\{x_n\}$的有限多项.构造开邻域族

$$G=\{U(x,\varepsilon_x)\mid\forall x\in[a,b],U(x,\varepsilon_x)\text{只含数列}\{x_n\}\text{的有限多项}\},$$

G覆盖闭区间$[a,b]$,由有限覆盖定理知,G中存在有限多个开邻域也覆盖$[a,b]$,从而$\{x_n\}$也被这有限多个开邻域覆盖,这与$\{x_n\}$只有有限多项矛盾.

证法四(用聚点定理)

如果数列$\{x_n\}$中有无限多相同的项,则由$\{x_n\}$的单调性知,$\{x_n\}$可视作常数列,此时必存在极限.

如果数列$\{x_n\}$中只有有限多项相同,则$\{x_n\}$可视作有界无限点集,由聚点定理知,$\{x_n\}$至少存在一个聚点c.由聚点定义知,$\forall\varepsilon>0,U(c,\varepsilon)$中含有$\{x_n\}$的无限多项,从而含有$\{x_n\}$的几乎所有项,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

证法五(用 Cauchy 收敛准则)

(反证法)假设$\{x_n\}$不存在极限,由 Cauchy 收敛准则的否定叙述知,

$\exists\varepsilon_0>0,\forall n\in N_+,\exists N,M>n(N>M)$,有$|x_N-x_M|\geqslant\varepsilon_0$,或$x_N\geqslant x_M+\varepsilon_0$.

构造子列:对于$n=1,\exists N_1,M_1>1(N_1>M_1)$,有$x_{N_1}\geqslant x_{M_1}+\varepsilon_0$;

对于$n=N_1,\exists N_2,M_2>N_1(N_2>M_2)$,有$x_{N_2}\geqslant x_{M_2}+\varepsilon_0\geqslant x_{N_1}+\varepsilon_0\geqslant x_{M_1}+2\varepsilon_0$;

……

对于$n=N_{k-1},\exists N_k,M_k>N_{k-1}(N_k>M_k)$,有$x_{N_k}\geqslant x_{M_k}+\varepsilon_0\geqslant x_{N_{k-1}}+\varepsilon_0\geqslant x_{M_1}+k\varepsilon_0$;

……

由此得到子列$\{x_{N_k}\}$,且$x_{N_k}\geqslant x_{M_1}+k\varepsilon_0$,从而$\lim\limits_{k\to\infty}x_{N_k}=+\infty$,这与$\{x_n\}$有界矛盾.

注　(1) 闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$的公共点也是两个端点数列$\{a_n\}\{b_n\}$的公共极

限,进而有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, \text{有}[a_n, b_n] \subset U(a, \varepsilon).$$

这是使用区间套定理的要领. 区间套定理常应用于"寻找具备某一性质的点"的证明.

(2) 单调增加数列的极限必是该数列的上确界,严格单调增加有上界的数列的极限必是该数列的严格上确界,单调增加数列若不存在极限,则该数列为正无穷大;单调增加有上界数列的上确界必是该数列的极限,它的聚点(若存在)是唯一的,为该数列的极限.

1.2.2 区间套定理的应用

一个闭区间套其实就是两个单调性相反但极限相同的"对向行驶"的数列,此时,$\{b_n\}$的每一项都是$\{a_n\}$的上界,$\{a_n\}$的每一项都是$\{b_n\}$的下界.

下面我们用闭区间套将数学的三个重要常数 ——e、c(欧拉常数)、π"套"出来.

例 1.2.2 设 $a_n = (1+\frac{1}{n})^n, b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$,则$\{[a_n, b_n]\}$是一个闭区间套.

证明 对于 $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$,利用均值不等式得,

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n = \underbrace{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})}_{n\text{个}} \times 1 < \left[\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}\right]^{n+1}$$

$$= (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = a_{n+1},$$

故$\{a_n\}$(严格)增加.

对于 $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$,利用均值不等式得,

$$\frac{1}{b_n} = (\frac{n}{n+1})^{n+1} = \underbrace{\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdots \frac{n}{n+1}}_{n+1\text{个}} \times 1 < \left(\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right)^{n+2}$$

$$= (\frac{n+1}{n+2})^{n+2} = \frac{1}{b_{n+1}},$$

故$\{b_n\}$（严格）减少.

因此，$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$，$n=1,2,\cdots$，进而

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}=0,$$

故$\{[a_n,b_n]\}$是一个闭区间套.

当用 e 表示$\{a_n\}\{b_n\}$的公共极限时，就有$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

在例 1.2.2 中，我们看到数列$\{a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\}$严格增加，数列$\{b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\}$严格减少，并且极限都是 e，这样就得到一个不等式：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\tag{1.2.1}$$

对不等式(1.2.1 取以 e 为底的自然对数，就有

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}\tag{1.2.2}$$

例 1.2.3　设$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\ln n$，

$$b_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n,$$

则$\{[a_n,b_n]\}$是一个闭区间套.

证明　首先，$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

其次，由前面给出的不等式(1.2.2)知，

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0,\quad b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

这意味着$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$，$n=1,2,\cdots$，因此$\{[a_n,b_n]\}$是一个闭区间套.

当用c（欧拉常数）来表示这个闭区间套的公共点时，就有$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=c$.

例 1.2.4　设 $a_k=\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\frac{1}{2k+1}$，$b_k=\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\frac{1}{2k}$，则$\{[a_k,b_k]\}$是一个闭区间套.

证明 由$\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\dfrac{4k^2+8k+4}{4k^2+8k+3}>1$及$\dfrac{b_{k+1}}{b_k}=\dfrac{4k^2+4k}{4k^2+4k+1}<1$推知$\{a_k\}$是严格增加的,$\{b_k\}$是严格减少的,即$[a_k,b_k]\supset[a_{k+1},b_{k+1}]$,$n=1,2,\cdots$,进而

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}(b_k-a_k)&=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\frac{1}{2k(2k+1)}\\&=\lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{2k+1}=0.\end{aligned}$$

因此$\{[a_k,b_k]\}$是一个闭区间套(那么,由此"套"出的点是什么呢?).

可以证明$\{[a_k,b_k]\}$的唯一公共点是$\dfrac{\pi}{2}$,即有如下不等式(1.2.3)成立:

$$\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\frac{1}{2k+1}<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\frac{1}{2k}\tag{1.2.3}$$

事实上,设$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,\mathrm{d}t$,可求得$I_0=\dfrac{\pi}{2}$,$I_1=1$.

当$n\geqslant 2$时,由分部积分法得:

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}t\,\mathrm{d}(-\cos t)\\&=-\sin^{n-1}t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}t\cos^2t\,\mathrm{d}t\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}t(1-\sin^2t)\mathrm{d}t=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,\end{aligned}$$

得到递推公式$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$(在本书第2章第2.4节的例2.4.5还将看到类似推导),由此推得

$$I_{2k+1}=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},I_{2k}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2},I_{2k-1}=\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}.$$

因为
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k+1}t\,\mathrm{d}t<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}t\,\mathrm{d}t<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k-1}t\,\mathrm{d}t,$$

所以
$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}<\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}<\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}.$$

整理可得不等式(1.2.3).

在上述三个例子中,我们也得到了三个重要极限:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e} \tag{1.2.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n) = c \tag{1.2.5}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{2} \tag{1.2.6}$$

式(1.2.6) 被我们称为 Wollisi(沃利斯) 公式.

1.2.3　单调有界定理的应用

例 1.2.5　设 $c>0, x_1=\sqrt{c}, x_{n+1}=\sqrt{c+x_n}, n=1,2,\cdots$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析　$x_n>0$,对于 $\{x_n\}$ 的前两项有 $x_2=\sqrt{c+\sqrt{c}}>\sqrt{c}=x_1$.

注意到 $f(x)=\sqrt{c+x}$ 在 $(0,+\infty)$ 严格增加,就会有 $x_3=f(x_2)>f(x_1)=x_2$.

更一般地,有 $x_{n+1}>x_n, n=1,2,\cdots$,即数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的,根据单调有界定理,需要证明它有上界,这个上界怎么找呢?

假定 $\{x_n\}$ 确实收敛,设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$,则 x^* 必然满足方程 $x=\sqrt{c+x}$,解得 $x^*=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$,我们有理由猜测这个 x^* 应该是 $\{x_n\}$ 的上确界.

解　首先 $\{x_n\}$ 是单调增加的,下证 $x_n\leqslant\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}, n=1,2,\cdots$

当 $n=1$ 时,$x_1=\sqrt{c}\leqslant\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}\Leftrightarrow\sqrt{4c}\leqslant1+\sqrt{1+4c}$,这是成立的;

假设 $x_k\leqslant\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$,则

$$x_{k+1}=\sqrt{c+x_k}\leqslant\sqrt{c+\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}}=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2};$$

由数学归纳法知 $x_n\leqslant\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}, n=1,2,\cdots$,进而求得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

例 1.2.6　数列 $\{x_n\}$ 由如下递推公式定义:$x_0=1, x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}, n=0,1,2,\cdots$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析 这里的数列$\{x_n\}\subset[0,1]$不具有单调性，事实上，可求得$\{x_n\}$的前四项为

$$x_0=1,x_1=\frac{1}{2},x_2=\frac{2}{3},x_3=\frac{3}{5},x_0>x_2,x_1<x_3.$$

注意到$f(x)=\frac{1}{1+x}$在$[0,1]$严格减少，就会有

$$x_2=f(x_1)>f(x_3)=x_4,x_3=f(x_2)<f(x_4)=x_5.$$

更一般地，

$$x_{2n}=f(x_{2n-1})>f(x_{2n+1})=x_{2n+2},x_{2n-1}=f(x_{2n-2})<f(x_{2n})=x_{2n+1}.$$

从而$\{x_{2n}\}\{x_{2n+1}\}$单调有界.

解 设$f(x)=\frac{1}{1+x},x\in[0,1]$，显然$\{x_n\}\subset[0,1]$，$f(x)$在$[0,1]$严格减少. 由上述分析过程知$\{x_{2n}\}\{x_{2n+1}\}$单调有界，由单调有界定理知$\{x_{2n}\}\{x_{2n+1}\}$收敛.

又 $x_{2n}=f[f(x_{2n-2})]=\frac{1+x_{2n-2}}{2+x_{2n-2}},x_{2n+1}=f[f(x_{2n-1})]=\frac{1+x_{2n-1}}{2+x_{2n-1}}$，

对两式同时取极限解得：

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\text{故}\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

注 对于满足迭代方程$x_{n+1}=f(x_n)$的数列$\{x_n\}$来说，其单调性取决于$f(x)$的单调性：

如果$f(x)$递增，那么$\{x_n\}$是单调的（要么递增，要么递减）；

如果$f(x)$递减，那么$f(f(x))$递增，进而$\{x_{2n}\}\{x_{2n+1}\}$是单调的（且具有相反的单调性）.

下面的例 1.2.7 我们用单调有界定理来考虑$\{a_n=(1+\frac{1}{n})^n\}$的收敛性.

例 1.2.7 证明数列$\{a_n=(1+\frac{1}{n})^n\}$的收敛性.

证法一 $\{a_n\}$（严格）增加的证明同于例 1.2.2，再由均值不等式得

$$\frac{1}{a_n}=(\frac{n}{n+1})^n=\left(\frac{1+1+\cdots+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^n\geqslant\left(\sqrt[n+1]{\frac{1}{4}}\right)^n,$$

故$a_n\leqslant 4^{\frac{n}{n+1}}<4$，故$\{a_n\}$有上界. 由单调有界定理知，数列$\{a_n\}$收敛.

证法二　令 $b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$，$\{b_n\}$（严格）减少（见例 1.2.2），且 $\forall n\in N_+$，$b_n>1$，故 $\{b_n\}$ 有下界.

由单调有界定理知，数列 $\{b_n\}$ 收敛，由 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n=\frac{b_n}{1+\frac{1}{n}}$ 推出，数列 $\{a_n\}$ 也收敛.

证法三　利用伯努利不等式：$(1+h)^n\geqslant 1+nh$，其中 $h>-1$，n 为自然数.

来证得 $\{a_n\}\{b_n\}$ 的单调性，以下证明 $\{b_n\}$（严格）减少. 事实上，

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}}=\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2}$$

$$\geqslant\left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right)\frac{n+1}{n+2}=1+\frac{1}{n(n+2)^2}>1,$$

故 $\{b_n\}$（严格）减少.

在实数完备性定理中，Cauchy 准则在研究函数收敛性问题中起到关键作用，这主要是因为 Cauchy 准则刻划函数收敛时无需借助“额外的力量”，而是从函数本身进行本质的刻划，其理论价值大于应用价值，其应用将在第 2 章着重体现，下面由表 1－1 给出 Cauchy（一致）收敛准则十种形式。

表 1－1　各种形式的 Cauchy（一致）收敛准则

1. 数列极限存在	$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在	$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall n>N,\forall p\in N_+$，有 $\lvert a_n-a_{n+p}\rvert<\varepsilon$
2. 函数极限存在	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在	$\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall x_1,x_2>A$，有 $\lvert f(x_1)-f(x_2)\rvert<\varepsilon$
3. 函数极限存在	$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_1,x_2\in(b-\delta,b)$，有 $\lvert f(x_1)-f(x_2)\rvert<\varepsilon$
4. 数项级数收敛	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛	$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall n>N,\forall p\in N_+$，有 $\left\lvert\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k\right\rvert<\varepsilon$
5. 无穷积分收敛	$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛	$\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall x_1,x_2>A$，有 $\left\lvert\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\right\rvert<\varepsilon$

续表 1-1

6. 瑕积分收敛	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(b 为瑕点)收敛	$\forall \varepsilon>0,\exists \delta>0,\forall x_1,x_2\in(b-\delta,b)$,有 $\left\|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x\right\|<\varepsilon$
7. 函数项级数一致收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛	$\forall \varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall n>N,\forall p\in N_+,\forall x\in I$,有 $\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right\|<\varepsilon$
8. 函数列一致收敛	$\{f_n(x)\}$ 在区间 I 一致收敛	$\forall \varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall n>N,\forall p\in N_+,\forall x\in I$,有 $\|f_{n+p}(x)-f(x)\|<\varepsilon$
9. 含参量无穷积分一致收敛	$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在区间 I 一致收敛	$\forall \varepsilon>0,\exists A>0,\forall x_1,x_2>A,\forall u\in I$,有 $\left\|\int_{x_1}^{x_2} f(x,u)\mathrm{d}x\right\|<\varepsilon$
10. 含参量瑕积分一致收敛	$\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$($b$ 为瑕点)在区间 I 一致收敛	$\forall \varepsilon>0,\exists \delta>0,\forall x_1,x_2\in(b-\delta,b),\forall u\in I$,有 $\left\|\int_{x_1}^{x_2} f(x,u)\mathrm{d}x\right\|<\varepsilon$

表 1-1 中,1 ~ 6 统称为 Cauchy 收敛准则,7 ~ 10 统称为 Cauchy 一致收敛准则.

如果读者能够利用数列的 Cauchy 收敛准则结合各种函数收敛的概念证明出表1-1 中"2 ~ 10",则说明你已经掌握了关于函数收敛的最核心理论.

思考题 1.2

1. 若$\{a_n\}$单调增加,$\{b_n\}$单调减少,且$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,则$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的极限存在且相等.

2. 设 $b_1>a_1>0,a_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n},b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2},n=1,2,\cdots$,则$\{[a_n,b_n]\}$是一个闭区间套.

3. 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上有定义,取且仅取 0 和 1 两个值,求证:至少存在 $\xi\in[a,b]$,使得在 ξ 的每一个邻域上,$f(x)$ 同时取到 0 和 1 两个值.

4. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上单调增加,$g(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $f(a)\geqslant g(a),f(b)\leqslant g(b)$,证明:$\exists \xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

5. 设 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上可导函数，且 $0 < f'(x) \leqslant \frac{k}{1+x^2}$，$x \in \mathbf{R}$，$k$ 为正常数. 取定 $x_0 \in \mathbf{R}$，令 $x_{n+1} = f(x_n)$，$(n = 0,1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

1.3　数列极限与一元函数极限

本节主要介绍数列极限与一元函数极限的求法. 数列是定义域为正整数集的函数，这里我们介绍数列极限的基本求法、利用 $\frac{*}{\infty}$ Stolz 定理求数列极限和利用级数求数列极限三方面内容. 在一元函数极限中，我们较多地关注利用 L'hospital(洛必达) 法则和 Taylor(泰勒) 公式求极限.

1.3.1　数列极限

1. 数列极限的基本求法

定义 1.3.1　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N$，有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

例 1.3.1　用数列极限定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1, (a > 0)$.

证法一　当 $a = 1$ 时，显然成立.

当 $a > 1$ 时，对 $\forall \varepsilon > 0$，要使不等式 $\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$ 成立，解得 $n > \frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$，取 $N = \frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)} \in \mathbf{R}^+$ (或取 $N = \left[\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right] + 1 \in \mathbf{N}_+$ 或限制 $0 < \varepsilon < a - 1$，取 $N = \left[\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right] \in \mathbf{N}_+$)，对 $\forall n > N$，就有 $\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

当 $0 < a < 1$ 时，对 $\forall \varepsilon > 0$，要使不等式 $\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = 1 - \sqrt[n]{a} < \varepsilon$ 成立，解得 $n > \frac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}$(限制 $0 < \varepsilon < 1$)，取 $N = \frac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)} \in \mathbf{R}^+$，对 $\forall n > N$，有 $\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

综上，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

证法二　当 $a = 1$ 时，显然成立.

当 $a>1$ 时，令 $h_n=\sqrt[n]{a}-1$，则 $a=(1+h_n)^n\geqslant 1+nh_n$，$h_n\leqslant\frac{a-1}{n}$.

要使不等式 $\frac{a-1}{n}<\varepsilon$ 成立，解得 $n>\frac{a-1}{\varepsilon}$，取 $N=\frac{a-1}{\varepsilon}\in\mathbf{R}^+$，对 $\forall n>N$，就有 $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$.

当 $a<1$ 时，令 $h_n=\sqrt[n]{\frac{1}{a}}-1$，$\frac{1}{a}=(1+h_n)^n\geqslant 1+nh_n$，$h_n\leqslant\frac{\frac{1}{a}-1}{n}$.

要使不等式 $\frac{\frac{1}{a}-1}{n}<\varepsilon$ 成立，解得 $n>\frac{\frac{1}{a}-1}{\varepsilon}$，取 $N=\frac{\frac{1}{a}-1}{\varepsilon}\in\mathbf{R}^+$，对 $\forall n>N$，就有

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=1-\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{a}h_n<h_n<\frac{\frac{1}{a}-1}{n}<\varepsilon.$$

综上，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

例 1.3.2 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\max\{a_n,b_n\}=\max\{a,b\}$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\min\{a_n,b_n\}=\min\{a,b\}$.

证法一 当 $a=b$ 时，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$，则

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N_+$，$\forall n>N$，同时有 $|a_n-a|<\varepsilon$，$|b_n-a|<\varepsilon$，进而 $|\max\{a_n,b_n\}-a|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\max\{a_n,b_n\}=a=\max\{a,b\}$.

当 $a\neq b$ 时，不妨设 $a>b$，则由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 及保序性知，

$$\exists N_1\in N_+,\forall n>N_1,a_n>b_n,$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\max\{a_n,b_n\}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=\max\{a,b\}$.

证法二 因为 $\max\{a_nb_n\}=\frac{a_n+b_n+|a_n-b_n|}{2}$，故

$$\lim_{n\to\infty}\max\{a_n,b_n\}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n+|a_n-b_n|}{2}=\frac{a+b+|a-b|}{2}=\max\{a,b\}.$$

例 1.3.3 设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 满足如下条件：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$；(2) $\forall n\in N_+$，$\exists\lambda_n\in[0,1]$，使得 $c_n=\lambda_na_n+(1-\lambda_n)b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

证法一　由条件(2)知，$\min\{a_n, b_n\} \leqslant c_n \leqslant \max\{a_n, b_n\}$，由条件(1)及例 1.3.2 知，$\lim\limits_{n\to\infty}\max\{a_n, b_n\} = a$，$\lim\limits_{n\to\infty}\min\{a_n, b_n\} = a$，再根据两边夹定理知，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

证法二　由条件(2)知，$\forall n \in \mathbf{N}_+$，$\exists \lambda_n \in [0,1]$，使得

$$c_n = \lambda_n a_n + (1-\lambda_n) b_n = b_n + \lambda_n (a_n - b_n),$$

注意到 $\{\lambda_n\}$ 为有界量，$\{a_n - b_n\}$ 为无穷小量，结合条件(1)得，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

例 1.3.4　若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$（$a$ 为有限数），则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

证明　($\varepsilon/2$ 法)对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_0 \in \mathbf{N}_+$，$\forall n > N_0$，有 $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

固定 N_0，对上述 $\forall \varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_0} - a|}{n} = 0$ 知，

$$\exists N_1 \in \mathbf{N}_+, \forall n > N_1, \text{有} \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_0} - a|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N = \max\{N_0, N_1\}$，$\forall n > N$，有

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| \leqslant \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_0} - a|}{n} + \frac{|a_{N_0+1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

另外，对于非正常极限还有：

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$（$a$ 为 $+\infty$，$-\infty$），则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$（请读者自证！）

例 1.3.5　证明下列极限

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$（$a$ 为有限数或 $+\infty$），$a_n \geqslant 0$，$(n = 1, 2, \cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = a$（$a$ 为有限数或 $+\infty$，$-\infty$），则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = a$；

(3) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$($a$为有限数或$+\infty$),$a_n>0$,($n=1,2,\cdots$),则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

证明 (1) 当$a=0$时,有$0\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

当$a>0$及$a=+\infty$时,不妨设$a_n>0$,($n=1,2,\cdots$),进而有

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

然后利用两边夹定理可得.

(2) 令$b_n=a_n-a_{n-1}$,($n=1,2,\cdots$),其中规定$a_0=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+(a_1-a_0)}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+b_{n-1}+\cdots+b_2+b_1}{n}=a.$$

(3) 令$b_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$,($n=1,2,\cdots$),其中规定$a_0=1$,则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_1}{a_0}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_nb_{n-1}\cdots b_1}=a.$$

注 1 例 1.3.5 的结论(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=a$与例 1.3.4 是等价的,事实上,令$b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,

则
$$\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=a,$$

由例 1.3.5 结论(2) 知
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=a.$$

注 2 在正项级数判别法中,我们有比式判别法和根式判别法.

设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,($a_n>0$),$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$,则当$a<1$时级数收敛,$a>1$时级数发散.

例 1.3.5 的结论(3) 说明能用比式判别法时必能用根式判别法,但反之不然.

例如正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{2^n}$就不能用比式判别法但能用根式判别法判别其收敛.

数列极限的求法还有很多,比如上一节介绍的借助于单调有界定理求极限的

方法. 下面再介绍两种比较有用的方法：利用$\frac{*}{\infty}$Stolz（施笃兹）定理和利用级数的方法.

2. 数列极限$\frac{*}{\infty}$Stolz 定理

这部分的题目需要用到下面的定理及推论.

定理 1.3.1　（数列极限$\frac{*}{\infty}$Stolz 定理）　若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足如下条件：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$；（2）$\{b_n\}$严格单调；（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$（$l$为有限数、$+\infty$或$-\infty$），则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$.（证明详见附录 Ⅰ）

推论　若数列$\{a_n\}$严格减少且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n a_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} na_n=A$.

证明　令$b_n=\frac{1}{a_n}$，则$\{b_n\}$严格增加且$b_n\to+\infty$

因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n a_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=A$，则由定理 1.3.1 有，

$$\lim_{n\to\infty} na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n a_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=A.$$

上述 Stolz 定理及其推论在解决数列极限问题时非常实用，下面就是较为经典的例子.

例 1.3.6　若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2^{k-1}a_2+\cdots+n^{k-1}a_n}{n^k}=\frac{a}{k}$.

证明　令$x_n=a_1+2^{k-1}a_2+\cdots+n^{k-1}a_n$，$y_n=n^k$，则由 Stolz 定理知，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2^{k-1}a_2+\cdots+n^{k-1}a_n}{n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{k-1}a_{n+1}}{(n+1)^k-n^k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-1}(1+\frac{1}{n})^{k-1}a_{n+1}}{n^k[(1+\frac{1}{n})^k-1]}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{k-1}}{n[(1+\frac{1}{n})^k-1]}\cdot a_{n+1}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{k-1}}{\lim\limits_{n\to\infty} n[(1+\frac{1}{n})^k-1]}\cdot\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\frac{a}{k}.$$

其中$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{k-1}=1$，

$$\lim_{n\to\infty}n[(1+\frac{1}{n})^k-1]=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^k-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k.$$

显然当$k=1$时此题就是例 1.3.4.

例 1.3.7 设$a_n=\frac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n}k!$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解 令$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k!$，$y_n=n!$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

例 1.3.8 设数列$a_1=C(0<C<1)$，$a_{n+1}=a_n(1-a_n)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$.

证明 由已知可推得$0<a_n<1$及$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-a_n<1$，即$\{a_n\}$严格减少且有界.

根据单调有界定理$\{a_n\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，由迭代方程知$a=a(1-a)$，解得$a=0$.

根据定理 1.3.1 之推论，只需证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=1$.

事实上，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n\cdot a_n(1-a_n)}{a_n-a_n(1-a_n)}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-a_n)=1$.

3. 利用级数求数列极限

这里首先需要知道的一个结论：

定理 1.3.2 数列$\{x_n\}$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$具有相同的敛散性.

这从$x_{n+1}=x_1+\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)$即可看出.

例 1.3.9 证明下列数列是收敛的：

(1)$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$；

(2)$x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$；

(3)$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{3}{2}n^{\frac{2}{3}}$.

证明　仅证(1),另外两个类型完全相同,请读者自己练习.

对于递减数列$\{x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\}$(见例 1.2.3),如果我们不愿意求它的下界,那就可以去判别对应的同号级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$的敛散性.因为

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1} - (\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}))$$
$$= \frac{-1}{n(n+1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - o(\frac{1}{n^2}),$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1} - x_n}{1/n^2} = -\frac{1}{2}$,这说明$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$是收敛的,从而$\{x_n\}$收敛.

例 1.3.10　设$x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n (p > 0, q > 0, p + q = 1, n = 1, 2, \cdots)$,求$\{x_n\}$的极限.

解　首先
$$x_{n+2} - x_{n+1} = (p-1)x_{n+1} + qx_n = (p-1)x_{n+1} + (1-p)x_n$$
$$= (p-1)(x_{n+1} - x_n),$$

令$y_n = x_{n+1} - x_n$,就有

$$y_n = (p-1)y_{n-1} = \cdots = (p-1)^{n-1}y_1 = (p-1)^{n-1}(b-a),$$

因此,

$$x_{n+1} = x_1 + \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k)$$
$$= x_1 + \sum_{k=1}^{n}y_k = a + (b-a)\sum_{k=1}^{n}(p-1)^{k-1} \to a + \frac{b-a}{2-p}(n \to \infty).$$

下面的例 1.3.11 体现了求数列极限的常用方法.

例 1.3.11　求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

解法一　限定$n > 2$,由均值不等式得:

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = (\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\times\underbrace{1\times1\times\cdots\times1}_{n-2个})^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n}$$
$$= 1 + \frac{2\sqrt{n} - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}},$$

于是 $1 \leqslant \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$（对 $n = 1,2$ 也成立），故 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

解法二 令 $h_n = \sqrt[n]{n} - 1$，限定 $n \geqslant 2$，就有

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2} h_n{}^2 + \cdots + h_n^n.$$

由 $h_n > 0 (n \geqslant 2)$ 推得，

$$n > \frac{n(n-1)}{2} h_n{}^2 \text{ 或 } h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leqslant \sqrt{\frac{2}{n - \frac{n}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{n}},$$

于是 $1 \leqslant \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$（对 $n = 1$ 也成立），由两边夹定理知，$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

解法三 对于数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 来说，当 $n \geqslant 3$ 时严格递减.

（令 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, x \in (0, +\infty)$，则 $f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$）

又 $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$，由单调有界定理知，$\{\sqrt[n]{n}\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = l$.

注意到

$$x_{2n} = \sqrt[2n]{2n} = \sqrt[n]{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x_n},$$

令 $n \to \infty$，就有 $l = \sqrt{l}$，解得 $l = 1$ 或 $l = 0$（舍去），于是 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

解法四 $\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1 \times \frac{2}{1} \frac{3}{2} \cdots \frac{n}{n-1}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$,

其中 $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ \frac{n}{n-1}, & n > 1 \end{cases}$，$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$，故 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

解法五 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

1.3.2 函数极限

对于函数极限（包括非正常极限），根据变量的变化趋势，刻划起来一共是 24 种，其规律是将变化趋势与邻域相对应.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to x_0^+ \\ x \to x_0^-}} f(x) = \begin{cases} b(\text{有限数}) \\ \infty \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}, \quad \lim_{\substack{x \to \infty \\ x \to +\infty \\ x \to -\infty}} f(x) = \begin{cases} b(\text{有限数}) \\ \infty \\ +\infty \\ -\infty \end{cases},$$

其中 $x\to x_0$，$x\to\infty$ 变化趋势下的极限称为双侧函数极限，其它的称为单侧函数极限.

例 1.3.12　证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x_0^2}$，$|x_0|<1$.

证明　注意到 $|x|\leqslant 1$，$|x_0|<1$，对 $\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0^2}\right|=\frac{|x_0^2-x^2|}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x_0^2}}\leqslant\frac{|x+x_0|\,|x-x_0|}{\sqrt{1-x_0^2}}$$

$$\leqslant\frac{2|x-x_0|}{\sqrt{1-x_0^2}}<\varepsilon\ \text{成立},$$

解得 $|x-x_0|<\dfrac{\sqrt{1-x_0^2}}{2}\varepsilon$，取 δ 有两种限定方法：

取 $\delta=\min\{\dfrac{\sqrt{1-x_0^2}}{2}\varepsilon,1-x_0,1+x_0\}$，或通过限定 $\dfrac{\sqrt{1-x_0^2}}{2}\varepsilon<\min\{1-x_0,1+x_0\}$，进而限定 $0<\varepsilon<\min\{2\sqrt{\dfrac{1-x_0}{1+x_0}},2\sqrt{\dfrac{1+x_0}{1-x_0}}\}$，再取 $\delta=\dfrac{\sqrt{1-x_0^2}}{2}\varepsilon$，

最后当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有 $\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0^2}\right|<\varepsilon$.

例 1.3.13　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}$.

解法一（利用重要极限）

$$\lim_{x\to+\infty}(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}=9\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3^x}\right)^{\frac{1}{x}}=9\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3^x}\right)^{3^x}\right]^{\frac{1}{3^x\cdot x}}=9\times e^0=9,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}=3\lim_{x\to-\infty}(1+3^x)^{\frac{1}{x}}=3\lim_{x\to-\infty}\left[(1+3^x)^{\frac{1}{3^x}}\right]^{\frac{3^x}{x}}=3\times e^0=3.$$

解法二（利用两边夹定理）

当 $x>0$ 时，$9^x<3^x+9^x<2\times 9^x$，$9<(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}<2^{\frac{1}{x}}\times 9$，

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}=9$，

当 $x<0$ 时，$3^x<3^x+9^x<2\times 3^x$，$3<(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}<2^{\frac{1}{x}}\times 3$，

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}=9$.

解法三（利用 L'hospital 法则）

$$\lim_{x\to+\infty}(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(3^x+9^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x\ln3+9^x\ln9}{3^x+9^x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^{-x}\ln3+\ln9}{3^{-x}+1}}=e^{\ln9}=9,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(3^x+9^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^x\ln3+9^x\ln9}{3^x+9^x}}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln3+3^x\ln9}{1+3^x}}=e^{\ln3}=3.$$

例 1.3.14 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

解法一(利用 L'hospital 法则)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\left(\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2}=-\frac{e}{2}.$$

解法二(利用等价无穷小替换)

令$\dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}-1=u$,则$\dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1+u$. 当 $x\to 0$ 时,有

$$\frac{1}{x}\ln(1+x)-1=\ln(1+u)\sim u=\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}-1.$$

于是$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{e}{2}.$$

解法三(利用 Taylor 公式) 因 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$,故

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}=e^{\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)}.$$

于是$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)}-e}{x}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{e^{\left(-\frac{x}{2}+o(x)\right)}-1}{-\frac{x}{2}+o(x)}\cdot\frac{-\frac{x}{2}+o(x)}{x}=-\frac{e}{2}.$$

例 1.3.15 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$,求常数 a,b.

解法一(根据渐近线定义)

已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$, 即 $y=ax+b$ 为函数 $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$ 在 $x\to+\infty$ 方向上的渐近线. 于是

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}.$$

解法二（有理化法）

已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}$

$$=0,$$

当且仅当 $1-a^2=0,1+2ab=0$ 时上述结果才可能成立，解得

$$a=1,b=-\frac{1}{2}\text{ 或 }a=-1,b=\frac{1}{2}.$$

而当 $a=-1,b=\dfrac{1}{2}$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-\frac{1}{2}\right)=+\infty,$$

故只能有 $a=1,b=-\dfrac{1}{2}$.

解法三（利用 Taylor 公式）

因为　$\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x+o(x)$，故

$$\sqrt{x^2-x+1}=x\sqrt{1+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}=x\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)+o\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}+x\cdot o\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=x-\frac{1}{2}+o(1).$$

其中 $\dfrac{1}{2x}+x\cdot o\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$ 是当 $x\to+\infty$ 时的无穷小量，记为 $o(1)$，故有 $a=1,b=-\dfrac{1}{2}$.

例 1.3.16　若函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(0)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

证明 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}=0$知，

$$\text{对 }\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in\mathring{U}(0,\delta)\text{ 时},\left|\frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}\right|<\varepsilon,$$

即$\left|f(x)-f(\frac{x}{2})\right|<\varepsilon|x|$. 当用$\frac{x}{2^i}\in\mathring{U}(0,\delta)(i\in N_+)$替换这个不等式中的$x$时，就会有

$$\left|f(\frac{x}{2^i})-f(\frac{x}{2^{i+1}})\right|<\frac{\varepsilon|x|}{2^i},$$

进而，$\forall x\in\mathring{U}(0,\delta)$，

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant\left|f(x)-f(\frac{x}{2})\right|+\left|f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{2^2})\right|+\cdots+\left|f(\frac{x}{2^{n-1}})-f(\frac{x}{2^n})\right|\\&\quad+\left|f(\frac{x}{2^n})\right|<\varepsilon|x|+\frac{\varepsilon|x|}{2}+\cdots+\frac{\varepsilon|x|}{2^{n-1}}+\left|f(\frac{x}{2^n})\right|\\&=\varepsilon|x|(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})+\left|f(\frac{x}{2^n})\right|,\end{aligned}$$

注意到$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\to\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2,\left|f(\frac{x}{2^n})\right|\to 0,(n\to\infty)$，就有

$\forall x\in\mathring{U}(0,\delta)$，$|f(x)|\leqslant 2\varepsilon|x|$，即$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant 2\varepsilon$，故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

例 1.3.17 若函数$f(x)$在$\mathring{U}(0)$内有定义，且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(px)-f(qx)}{x}=0$，其中$|p|\geqslant 1$，$|q|<|p|$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

证明 当$q=0$时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(px)-f(0)}{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(px)=f(0)$，这与$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$共同推出$f(0)=0$，进而有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(px)}{x}=0$，从而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\overset{x=pt}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(pt)}{pt}=0$.

当$q\neq 0$时，对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in\mathring{U}(0,\delta)$时，$\left|\dfrac{f(px)-f(qx)}{x}\right|<\varepsilon$，即$|f(px)-f(qx)|<\varepsilon|x|$.

因$|p|\geqslant 1$，用$\frac{x}{p}\in\mathring{U}(0,\delta)$替换这个不等式中的$x$，并记$\frac{q}{p}=\alpha(|\alpha|<1)$时，

就会有$|f(x)-f(\alpha x)|<\frac{\varepsilon}{|p|}|x|$，然后用例 1.3.16 的手法即可证得结论.

思考题 1.3

1. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$（$a,b$ 为有限数），则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$.

2. 设 k 为正整数，证明

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+k}-a_n)=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{a}{k}$；

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+k}}{a_n}=a$，$a_n>0$，$(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[k]{a}$.

3. 求下列极限

(1) 设 $a_n=\frac{1}{\ln n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(2) 设 $a_n=\frac{n}{a^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(3) 设 $a_n=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

4. 设数列 $a_1=C(C>0)$，$a_{n+1}=\ln(1+a_n)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=2$.

5. 设数列 $a_1=C(C>0)$，$a_{n+1}=\sin a_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}na_n^2=3$.

6. 判断交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nu_n(u_n>0)$收敛的莱布尼兹判别法，关键在于获知数列$\{u_n\}$单调并且趋于 0，请证明下列级数是收敛的：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{n}-1)$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

7. (1) 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上严格增加，且存在$\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

(2) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上的唯一最小值点 x_0 处连续，且存在$\{x_n\}\subset[a,b]$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

8. 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2\arctan x}{\pi}\right)^x$.

9. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $y^2 + xy + x^2 - x = 0$ 确定的满足 $y(1) = -1$ 的连续函数，求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{y(x)+1}$. 如果 $y = y(x)$ 还是满足 $y(1) = -1$ 的二阶可导函数，有什么方法求极限呢？

1.4 一元连续函数概念

函数连续是可微的必要条件，还是可积的充分条件，它是联系积分与微分的桥梁与纽带.

定义 1.4.1 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上有定义，$f(x)$ 在 x_0 连续的等价陈述主要包括：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$；

(3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$，其中 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$；

(4) $\forall x_n \in U(x_0)$，且 $x_n \to x_0 (n\to\infty)$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$；

(5) $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega(f, U(x_0, \delta)) = 0$.

单侧连续的等价陈述可相应改写.

1.4.1 函数连续性的应用

下面的一个简单例题将给出连续性的一种重要应用思想.

例 1.4.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，对于任意有理数 $r_1, r_2 \in [a,b]$ 且 $r_1 < r_2$，有 $f(r_1) < f(r_2)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格增加.

证明 任取 $x_1, x_2 \in [a,b]$，且 $x_1 < x_2$.

在 x_1, x_2 之间插入两有理数 x_3, x_4，使得 $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$.

另取有理点列 $r_n \in (x_1, x_3)$，$q_n \in (x_4, x_2)$，且 $r_n \to x_1$，$q_n \to x_2$，则 $f(x_1) = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) \leqslant f(x_3) < f(x_4) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f(q_n) = f(x_2)$，从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格增加.

在这个题目当中，我们注意到这样一种思想：当函数 $f(x)$ 在某区间的稠密子

集具有性质 p 时，如果 $f(x)$ 在该区间是连续的，则 $f(x)$ 有望在该区间也具有性质 p. 这可以看作是连续函数成为数学分析着重讨论的一类函数的原由之一，因为从有理数集扩充到实数集的完备化过程必然会带来定义在其上的函数对有理数集成立的性质的保持问题（所谓数集 D 在数集 A 中稠密，指的是 D 是 A 的子集，且 A 中任意一点的无论多么小的邻域中都含有属于 D 的点，$[a,b]$ 中的有理数子集就是 $[a,b]$ 的稠密子集）.

利用这种思想，我们来看下面的例子.

例 1.4.2　设 f 在 $x=0$ 连续，且对任何 $x,y\in\mathbf{R}$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明：$f(x)=ax, x\in\mathbf{R}$，其中 $a=f(1)$.

证明　(1) 证明 f 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

因 $f(x)=f(x+0)=f(x)+f(0)$，故 $f(0)=0$.

因对 $\forall x_0\in\mathbf{R}$，有 $f(x)=f(x-x_0+x_0)=f(x-x_0)+f(x_0)$，结合 f 在 $x=0$ 连续，有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}f(x-x_0)+f(x_0)=f(x_0),$$

从而 f 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

(2) 证明对任意有理数 r，有 $f(rx)=rf(x)$.

对 $\forall n\in N_+, \forall x\in\mathbf{R}$，有

$$f(nx)=f(\overbrace{x+x+\cdots+x}^{n\text{个}})=f(\overbrace{x+x+\cdots+x}^{n-1\text{个}})+f(x)=\cdots=nf(x),$$

$$f(x)=f(n\cdot\frac{x}{n})=nf(\frac{x}{n}),f(\frac{x}{n})=\frac{1}{n}f(x),$$

$\forall n,m\in N_+, f(\frac{m}{n}x)=mf(\frac{x}{n})=\frac{m}{n}f(x)$，该结论说明对于正有理数 r，有 $f(rx)=rf(x)$.

又 $0=f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$，故 $f(-x)=-f(x)$，从而对于正有理数 r，有 $f(-rx)=-rf(x)$，故任意有理数 r，有 $f(rx)=rf(x)$.

(3) 证明对任意实数 t，有 $f(tx)=tf(x), x\in\mathbf{R}$.

对任意实数 t，取有理数列 $r_n\to t(n\to\infty)$，则

$$f(tx)=\lim_{n\to\infty}f(r_nx)=\lim_{n\to\infty}r_nf(x)=tf(x),x\in\mathbf{R}.$$

当特取 $x=1$，可得 $f(t)=f(1)t, t\in\mathbf{R}$ 即为所证.

关于上面读到的稠密子集与连续性相结合的思想，在附录 Ⅱ 中得到发挥，详见附录 Ⅱ.

1.4.2 某些特性函数的连续性

下面的例 1.4.3 将指出导函数的连续性.

例 1.4.3 设函数 $f(x)$ 区间 I 上可导，则 $f'(x)$ 在区间 I 只可能有第二类间断点.

证明 设 $x_0 \in I$ 为 $f'(x)$ 的间断点，不妨设 x_0 在 I 的内部.

若 x_0 为 $f'(x)$ 的可去间断点，则极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ 存在，由例 3.2.5 导数极限定理，必有 $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$，从而 x_0 为 $f'(x)$ 的连续点，矛盾.

若 x_0 为 $f'(x)$ 的跳跃间断点，则极限 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$ 存在但不等，由导数极限定理，必有 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$，从而 $f(x)$ 在 x_0 不可导，矛盾. 因此，x_0 为 $f'(x)$ 的第二类间断点.

例 1.4.4 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，$x \in [-1,1]$ 的导函数的连续性.

解 当 $x \neq 0$ 时，$f'(x) = \left(x^\alpha \sin \dfrac{1}{x}\right)' = \alpha x^{\alpha-1} \sin \dfrac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \dfrac{1}{x}$.

当 $x = 0$ 时，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^\alpha \sin \dfrac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha-1} \sin \dfrac{1}{x} = \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \\ \text{不存在}, & \alpha \leqslant 1 \end{cases}$，

故当 $\alpha \leqslant 1$ 时，$f(x)$ 在$[-1,1]$ 不可导(因为其在点 0 不可导)，

当 $\alpha > 1$ 时，$f(x)$ 在$[-1,1]$ 可导，此时

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin \dfrac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

当 $\alpha > 2$ 时，$\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \alpha x^{\alpha-1} \sin \dfrac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \dfrac{1}{x} = 0 = f'(0)$，

当 $1 < \alpha \leqslant 2$ 时，$\lim\limits_{x \to 0} \alpha x^{\alpha-1} \sin \dfrac{1}{x} = 0$，而 $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha-2} \cos \dfrac{1}{x}$ 不存在.

故当 $\alpha > 2$ 时，$f'(x)$ 在$[-1,1]$连续，当 $1 < \alpha \leqslant 2$ 时，$f'(x)$ 在$[-1,1]$不连续，且 $x=0$ 为 $f'(x)$ 的第二类间断点.

下面的例 1.4.5 指出了可积函数的连续性.

例 1.4.5　设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，则

(1) $f(x)$ 的连续点集在$[a,b]$稠密；

(2) $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$连续.

证明　(1) 只需证 $f(x)$ 在$[a,b]$上至少有一个连续点.

因 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，故 $\exists [a_1,b_1] \subseteq [a,b]$，使得 $\omega(f,[a_1,b_1]) < \frac{1}{2}$.

若不然，对$[a,b]$的任意分割 T，对应的振幅和 $\sum_{k=1}^{n}\omega_k \Delta x_k \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \frac{b-a}{2}$，这与可积矛盾. 不妨设 $a < a_1 < b_1 < b$，且 $b_1 - a_1 < \frac{b-a}{2}$.

同理，$\exists [a_2,b_2] \subseteq [a_1,b_1]$，使得

$$\omega(f,[a_2,b_2]) < \frac{1}{2^2}, a_1 < a_2 < b_2 < b_1, \text{且 } b_2 - a_2 < \frac{b-a}{2^2}.$$

如此下去，得到闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$，且满足 $\omega(f,[a_n,b_n]) < \frac{1}{2^n}$，其中$\{a_n\}$严格增加，$\{b_n\}$严格减少.

由区间套定理知，

$\exists x_0 \in (a_n,b_n), n=1,2,\cdots$. 对任意的 $n \in \mathbf{N}_+$，只要正数 δ 充分小，就会有 $U(x_0,\delta) \subset (a_n,b_n)$，

进而 $\omega(f,U(x_0,\delta)) \leqslant \omega(f,[a_n,b_n]) < \frac{1}{2^n} \to 0 (n\to\infty)$，

即 $\lim_{\delta\to 0^+}\omega(f,U(x_0,\delta)) = 0$，由例 1.1.3 知，$f(x)$ 在 x_0 连续.

(2) 因 f 在$[a,b]$上可积，故 f 在$[a,b]$有界，即

$$\exists M > 0, \forall x \in [a,b], \text{有 } |f(x)| \leqslant M.$$

于是对 $\forall x, x+\Delta x \in [a,b]$，有

$$|\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)| = \left|\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M|\Delta x|,$$

这说明 $\Phi(x)$ 在$[a,b]$连续.

思考题 1.4

1. 设函数 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数，则 $f(x)$ 在区间 I 的内部是连续的.

2. (1) 设函数 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的增函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只可能有第一类间断点.

(2) 设函数 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的增函数，且值域为 $[f(a),f(b)]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $M(x)=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant x}\{f(t)\}$ 和 $m(x)=\inf\limits_{a\leqslant t\leqslant x}\{f(t)\}$ 在 $[a,b]$ 连续.

4. 设函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的连续函数，且对任何 $x,y\in\mathbf{R}$，有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，则 $f(x)=a^x, x\in\mathbf{R}$，其中 $a=f(1)$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调减少且 $e^x f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

1.5 闭区间上连续函数的性质

连续函数的应用价值在于闭区间上连续函数的性质，这些整体性质的应用贯穿了数学分析始终，但凡重要结果都与之相关，例如微分中值定理、积分中值定理、原函数存在定理、隐函数存在定理等，因此对这类性质需加强理解.

1.5.1 介值性定理

我们利用例 1.5.1 和例 1.5.2 来深刻认识介值性定理.

例 1.5.1 证明零点定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

证法一(用确界定理) 不妨设 $f(a)>0, f(b)<0$，构造集合

$$A=\{x\,|\,x\in[a,b], f(x)>0\},$$

则由 $f(a)>0$ 知，$a\in A, A\neq\varnothing$.

又 $A\subset[a,b]$，故 A 有上界，由确界定理 A 有上确界，设 $\sup A=\xi$.

下证 $$\xi\in(a,b), f(\xi)=0.$$

由连续函数的局部保号性知，存在$[a,a+\delta)$、$(b-\delta,b]$，有

$$\forall x\in[a,a+\delta),f(x)>0,\forall x\in(b-\delta,b],f(x)<0,$$

推得$a<\xi<b$.

假设$f(\xi)\neq 0$，不妨设$f(\xi)>0$，由局部保号性知，

$$\exists\beta>0,\forall x\in(\xi-\beta,\xi+\beta)\subset[a,b],\text{有 } f(x)>0$$

取$\xi<\xi_1<\xi+\beta$，则由集合A的构造知，$\xi_1\in A$，从而$\xi_1\leqslant \sup A=\xi$，矛盾.

证法二(用有限覆盖定理)

(反证法)假设$\forall x\in[a,b]$，都有$f(x)\neq 0$，因函数$f(x)$在$[a,b]$连续，由局部保号性知，$\forall x\in[a,b]$，$\exists\delta_x>0$，使得函数$f(x)$在开邻域$U(x,\delta_x)\cap[a,b]$上不变号(恒正或恒负). 于是当x遍历$[a,b]$后，满足这一性质的开邻域就构成了闭区间$[a,b]$的一族开覆盖.

根据有限覆盖定理，存在有限多个开邻域覆盖$[a,b]$.

不妨设为n个：$U(x_1,\delta_{x_1}),U(x_2,\delta_{x_2}),\cdots,U(x_n,\delta_{x_n})$，且它们两两之间无包含关系(如有，则删去较小的邻域，不影响覆盖性)，$x_1<x_2<\cdots<x_n$.

对于$U(x_1,\delta_{x_1}),U(x_2,\delta_{x_2})$这两个开邻域而言，必然有$U(x_1,\delta_{x_1})\cap U(x_2,\delta_{x_2})\neq\varnothing$. 若不然，假设$U(x_1,\delta_{x_1})\cap U(x_2,\delta_{x_2})=\varnothing$，则有

$$x_1<x_1+\delta_{x_1}<x_2-\delta_{x_2}<x_2.$$

对于某个$x_0\in(x_1+\delta_{x_1},x_2-\delta_{x_2})$，$\exists 2<i\leqslant n$，使得$x_0\in U(x_i,\delta_{x_i})$.

因为$x_i>x_2>x_2-\delta_{x_2}>x_0$，所以$\forall x\in U(x_2,\delta_{x_2})$，$|x-x_i|<|x_0-x_i|<\delta_{x_i}$，即$U(x_2,\delta_{x_2})\subset U(x_i,\delta_{x_i})$，矛盾.

更一般地，可以得到$U(x_i,\delta_{x_i})\cap U(x_{i+1},\delta_{x_{i+1}})\neq\varnothing$，$1\leqslant i,i+1\leqslant n$.(不妨称为最少开覆盖的相邻相交性).

又因为函数$f(x)$在每个$U(x_i,\delta_{x_i})\cap[a,b](1\leqslant i\leqslant n)$上不变号，

故函数$f(x)$在$\bigcup\limits_{i=1}^{n}(x_i,\delta_{x_i})\cap[a,b]$上保持不变号，从而在$[a,b]$上不变号，这与$f(a)\cdot f(b)<0$矛盾.

证法三(用闭区间套定理)　不妨设$f(a)>0,f(b)<0$.

对$[a,b]$二等分得$[a,\frac{a+b}{2}]$，$[\frac{a+b}{2},b]$. 若$f(\frac{a+b}{2})\leqslant 0$，则记$[a,\frac{a+b}{2}]=[a_1,b_1]$，否则记$[\frac{a+b}{2},b]=[a_1,b_1]$，由此得到$[a_1,b_1]$满足$f(a_1)\geqslant 0,f(b_1)$

$\leqslant 0$.

再对$[a_1,b_1]$二等分，相同方法得到$[a_2,b_2]$满足 $f(a_2)\geqslant 0, f(b_2)\leqslant 0$. 如此下去，得到闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$，满足 $f(a_n)\geqslant 0, f(b_n)\leqslant 0, n=1,2,\cdots$. 由闭区间套定理知，存在点 $\xi\in[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$.

再由函数 $f(x)$ 在$[a,b]$连续知，$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(\xi)\geqslant 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=f(\xi)\leqslant 0$，从而 $f(\xi)=0, \xi\in(a,b)$.

例 1.5.2 下列陈述是等价的：

(1)（零点定理）若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，$f(a)\cdot f(b)<0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$；

(2)（介值性定理）若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，M,m 为其最大值和最小值，η 为介于 M,m 之间的任意数，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\eta$；

(3)（介值性定理）若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，η 为介于 $f(a),f(b)$ 之间的任意数，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\eta$；

(4) 若函数 $f(x)$ 在 I 连续且不恒常值，则 $f(I)=\{y\mid y=f(x),\forall x\in I\}$ 也是区间.

证明 仅证(3)⇒(4) 及(4)⇒(1).

(3)⇒(4)：任取 $y_1,y_2\in f(I)$，且 $y_1<y_2$，则

$$\exists x_1x_2\in I, f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2.$$

不妨设 $x_1<x_2$，则$[x_1,x_2]\subseteq I$，从而 $f(x)$ 在$[x_1,x_2]$连续.

对 $\forall y\in[y_1,y_2]$，即 y 为介于 $f(x_1),f(x_2)$ 之间的任意数，由(3)知，$\exists x\in[x_1,x_2]$，使得 $f(x)=y$，从而 $y\in f(I)$，$[y_1,y_2]\subseteq f(I)$，$f(I)$ 是区间.

(4)⇒(1)：不妨设 $f(a)>0, f(b)<0$. 由(4)知，$f([a,b])$ 是区间，从而 $[f(a),f(b)]\subseteq f([a,b])$. 又 $0\in[f(a),f(b)]$，故 $0\in f([a,b])$，即 $\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$. 再根据 $f(a)>0, f(b)<0$ 知，$\xi\in(a,b)$.

注 数学分析谈论的区间是下列数集的统称：

$[a,b],(a,b),[a,b),(a,b],(-\infty,a),(-\infty,a],(a,+\infty),[a,+\infty),(-\infty,+\infty)$

区间实际上可以这样定义：令$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，若 $\forall a,b\in I$，且 $a<b$，有$[a,b]\subseteq I$，则称 I 是区间. 在定理 2 的证明过程中使用的就是这种（区间作为 $\mathbf{R}$

中的凸集）定义. 介值性定理的核心内容在于指出，区间上的连续函数其值域也是区间.

例 1.5.3　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且 $f(0)=f(1)$，证明：对于任何的 $n\in \mathbf{N}_+$，存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi)$.

当 $n=1$ 时，取 $\xi=0$，有 $f(0+1)=f(0)$，结论成立. 以下用三种方法证明结论对 $n>1$ 也成立.

证法一　当 $n>1$ 时，令 $F(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x),x\in[0,1-\frac{1}{n}]$，

则
$$F(0)=f(\frac{1}{n})-f(0),$$
$$F(\frac{1}{n})=f(\frac{2}{n})-f(\frac{1}{n}),$$
$$\vdots$$
$$F(\frac{n-1}{n})=f(1)-f(\frac{n-1}{n}).$$

若存在 $i(0\leqslant i\leqslant n-1)$，使得 $F(\frac{i}{n})=f(\frac{i}{n}+\frac{1}{n})-f(\frac{i}{n})=0$，则取 $\xi=\frac{i}{n}$，结论成立.

若任意 $i(0\leqslant i\leqslant n-1)$，$F(\frac{i}{n})\neq 0$，则由 $F(0)+F(\frac{1}{n})+\cdots+F(\frac{n-1}{n})=f(1)-f(0)=0$ 知，$F(0),F(\frac{1}{n}),\cdots,F(\frac{n-1}{n})$ 中必有相邻两项异号，不妨设 $F(\frac{j}{n}),F(\frac{j+1}{n})$ 异号 $(0\leqslant j,j+1\leqslant n-1)$，由零点定理知，存在 $\xi\in(\frac{j}{n},\frac{j+1}{n})\subset(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi)$.

证法二　(1) 首先证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$x_1,x_2,\cdots x_n\in[a,b]$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是任意 n 个正数，且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得
$$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n).$$

事实上，由不等式 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{f(x_i)\}\leqslant\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{f(x_i)\}$ 知，$\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$ 必介于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的两个函

数值之间.

由介值性定理知，存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$.

(2) 其次证明本题结论.

当 $n > 1$ 时，令
$$F(x) = f(x+\frac{1}{n}) - f(x), x \in [0, 1-\frac{1}{n}],$$

则
$$F(0) + F(\frac{1}{n}) + \cdots + F(\frac{n-1}{n}) = 0.$$

取
$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{n}, \cdots, x_n = \frac{n-1}{n}, \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n},$$

并注意到 $F(x)$ 在 $[0, 1-\frac{1}{n}]$ 连续，于是由(1)知，存在 $\xi \in [0, \frac{n-1}{n}]$，使得
$$F(\xi) = \frac{1}{n}[F(0) + F(\frac{1}{n}) + \cdots + F(\frac{n-1}{n})] = 0,$$
即 $f(\xi + \frac{1}{n}) = f(\xi)$.

证法三 下面用反证法证明当 $n > 1$ 时结论也成立.

令
$$F(x) = f(x+\frac{1}{n}) - f(x), x \in [0, \frac{n-1}{n}],$$

假设存在某个 $n > 1$，对 $\forall x \in [0, \frac{n-1}{n}]$ 来说，$F(x) = f(x+\frac{1}{n}) - f(x) \neq 0$，

因 $F(x)$ 在 $[0, \frac{n-1}{n}]$ 连续，由零点定理知，$F(x)$ 在 $[0, \frac{n-1}{n}]$ 不变号，不妨设
$$F(x) = f(x+\frac{1}{n}) - f(x) > 0, \forall x \in [0, \frac{n-1}{n}].$$

从而
$$F(0) = f(\frac{1}{n}) - f(0) > 0,$$
$$F(\frac{1}{n}) = f(\frac{2}{n}) - f(\frac{1}{n}) > 0,$$
$$\vdots$$
$$F(\frac{n-1}{n}) = f(1) - f(\frac{n-1}{n}) > 0,$$

从而
$$f(0) < f(\frac{1}{n}) < f(\frac{2}{n}) < \cdots < f(\frac{n-1}{n}) < f(1),$$

这与 $f(0)=f(1)$ 矛盾.

例 1.5.4　若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，且对 $\forall x\in[a,b]$，$\exists y\in[a,b]$，使得 $|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|$，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$.

证法一（致密性定理）

由已知条件，对任意取定的 $x_0\in[a,b]$，$\exists x_1\in[a,b]$，使得

$$|f(x_1)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x_0)|,$$

对 $x_1\in[a,b]$，$\exists x_2\in[a,b]$，使得 $|f(x_2)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x_1)|$，

……

一般地，对 $x_{n-1}\in[a,b]$，$\exists x_n\in[a,b]$，使得 $|f(x_n)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x_{n-1})|$，

……

由此构造的点列 $\{x_n\}\subset[a,b]$，满足 $|f(x_n)|\leqslant\frac{1}{2^n}|f(x_0)|\,(n=1,2,\cdots)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$.

根据致密性定理，$\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi\in[a,b]$，于是

$$f(\xi)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0.$$

证法二　（最值性）

由函数 $f(x)$ 在$[a,b]$连续可推知 $|f(x)|$ 在$[a,b]$连续，故 $|f(x)|$ 在$[a,b]$有最小值 m. 显然 $m\geqslant0$. 设 $|f(\xi)|=m$，$\xi\in[a,b]$. 若 $m>0$，由已知条件，$\exists y\in[a,b]$，使得

$$|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(\xi)|=\frac{m}{2}<m,$$

这与 m 是最小值矛盾，故 $m=0$，即 $\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$.

1.5.2　一致连续性

定义 1.5.1　$f(x)$ 在区间 I 一致连续指的是：

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x_1,x_2\in I$，且 $|x_1-x_2|<\delta$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

关于一致连续的等价陈述主要包括：

(1)$f(x)$ 在区间 I 一致连续 $\Leftrightarrow$ 对区间 I 上任意两个数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时,就有$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$;(见例 1.5.10)

(2)$f(x)$ 在闭区间$[a,b]$一致连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在$[a,b]$连续;

(3)$f(x)$ 在开区间(a,b)一致连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在(a,b)连续,且 $f(a+0)$、$f(b-0)$存在.(见例 1.5.5)

这三个等价陈述是函数一致连续性的基本理论,必须掌握.

例 1.5.5 (推广的Cantor(康托)定理)函数 $f(x)$ 在开区间(a,b)一致连续的充要条件是 $f(x)$ 在(a,b)连续,且 $f(a+0)$、$f(b-0)$ 存在.

证明 必要性 因为函数 $f(x)$ 在(a,b)一致连续,故 $f(x)$ 在(a,b)连续,并且对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,($\delta<\dfrac{a+b}{2}$),$\forall x_1,x_2\in(a,b)$,$|x_1-x_2|<\delta$,有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$,当 $\forall x_1,x_2\in(a,a+\delta)$,或 $\forall x_1,x_2\in(b-\delta,b)$,因有$|x_1-x_2|<\delta$,进而$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$,根据Cauchy收敛准则,$f(a+0)$、$f(b-0)$存在.

充分性 因 $f(a+0)$、$f(b-0)$ 存在,由Cauchy收敛准则知,

$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta_1>0(\delta_1<\dfrac{a+b}{2})$,s.t. $\forall x_1,x_2\in(a,a+\delta_1)$ 及 $\forall x_1,x_2\in(b-\delta_1,b)$,有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

因函数 $f(x)$ 在(a,b)连续,从而 $f(x)$ 在$[a+\dfrac{\delta_1}{2},b-\dfrac{\delta_1}{2}]$一致连续,

故对上述 $\varepsilon>0$,$\exists\delta_2>0$,s.t. $\forall x_1,x_2\in[a+\dfrac{\delta_1}{2},b-\dfrac{\delta_1}{2}]$且$|x_1-x_2|<\delta_2$,有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\dfrac{\delta_1}{2},\delta_2\}$,则对 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$且$|x_1-x_2|<\delta$时,x_1,x_2同时属于$(a,a+\delta_1)$、$(b-\delta_1,b)$、$[a+\dfrac{\delta_1}{2},b-\dfrac{\delta_1}{2}]$这三个区间中的一个,都有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$,即 $f(x)$ 在(a,b)一致连续.

注 该题充分性的另一证法是利用连续延拓,构造函数

$$F(x)=\begin{cases}f(a+0), & x=a\\ f(x), & x\in(a,b),\\ f(b-0), & x=b\end{cases}$$

则 $F(x)$ 在闭区间$[a,b]$连续，由 Cantor 定理知，$F(x)$ 在闭区间$[a,b]$一致连续，从而 $f(x)$ 在(a,b)一致连续.

例 1.5.6　若函数 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$一致连续且有界.（反之不成立，考察 $f(x)=\sin x$ 便知）.

证明　因 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，由 Cauchy 收敛准则知，

$\forall \varepsilon>0, \exists M>a$，对 $\forall x_1, x_2 \in [M,+\infty)$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

又 $f(x)$ 在$[a,M+1]$一致连续，故

对上述 $\varepsilon>0, \exists \delta_1>0$，对 $\forall x_1, x_2 \in [a,M+1]$，$|x_1-x_2|<\delta_1$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,1\}$，对 $\forall x_1, x_2 \in [a,+\infty)$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，x_1, x_2 会同时属于$[M,+\infty)$或$[a,M+1]$（如果 x_1, x_2 分别属于$[M,+\infty)$与$[a,M+1]$，将导致 $|x_1-x_2|\geqslant 1$），进而可推知 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，即 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$一致连续.

再由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的局部有界性知，$\exists M_0>a$，使得 $f(x)$ 在$[M_0,+\infty)$有界，$f(x)$ 的连续性又蕴含着 $f(x)$ 在$[a,M_0]$有界，从而 $f(x)$ 是$[a,+\infty)$上的有界函数.

由例 1.5.5 及例 1.5.6 可总结出如下有用的命题：

命题　若函数 $f(x)$ 在区间 I 连续，且在 I 的端点处相应单侧极限存在，则 $f(x)$ 在区间 I 一致连续且有界.

利用该命题处理下面的结论显得很轻松.

例 1.5.7　(1) 若函数 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$连续，$g(x)$ 在$[a,+\infty)$一致连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$ 存在，则 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$一致连续.

(2) 若函数 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$连续，$y=kx+b$ 为 $f(x)$ 的渐近线，则 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$一致连续.

证明　(1) 令 $F(x)=f(x)-g(x), x\in[a,+\infty)$，

则 $F(x)$ 在$[a,+\infty)$连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 存在，于是 $F(x)=f(x)-g(x)$ 在$[a,+\infty)$一致连续，又 $g(x)$ 在$[a,+\infty)$一致连续，故 $f(x)=F(x)+g(x)$ 在$[a,+\infty)$一致连续.

(2) 令 $g(x)=kx+b, x\in[a,+\infty)$,

则 $g(x)$ 在$[a,+\infty)$一致连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$,由(1)可知结论成立.

例 1.5.8(衔接区间的一致连续性) 函数 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$一致连续充要条件是,$f(x)$ 在$[a,b]$,$[b,+\infty)$分别一致连续.

证明 仅证充分性.

因为 $f(x)$ 在$[a,b]$,$[b,+\infty)$一致连续,故 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,\forall x_1,x_2\in[a,b]$ 或 $\forall x_1,x_2\in[b,+\infty)$,并且$|x_1-x_2|<\delta_1$,就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

又 $f(x)$ 在 b 连续,故对上述 $\varepsilon>0,\exists\delta_2>0,\forall x_1,x_2\in(b-\delta_2,b+\delta_2)$,有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,对 $\forall x_1,x_2\in[a,+\infty)$,且$|x_1-x_2|<\delta$ 时,就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$,从而函数 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$一致连续.

例 1.5.9 证明下列问题

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足:

$\exists M>0,\forall x_1,x_2\in I$,有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|g(x_1)-g(x_2)|^{\alpha}$,

其中 $g(x)$ 在区间 I 一致连续,$\alpha>0$,则 $f(x)$ 在区间 I 一致连续.

(2) 若 $\alpha>0$,函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 α 阶 Lipschitz 条件:

$$\exists M>0,\forall x_1,x_2\in I,\text{有}|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|^{\alpha},$$

则 $f(x)$ 在区间 I 一致连续.

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导函数 $f'(x)$ 有界,则 $f(x)$ 在区间 I 一致连续.

证明 (1) 因 $g(x)$ 在区间 I 一致连续,故对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_1,x_2\in I$,且$|x_1-x_2|<\delta$,有$|g(x_1)-g(x_2)|<(\varepsilon/M)^{\frac{1}{\alpha}}$,

进而$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|g(x_1)-g(x_2)|^{\alpha}<\varepsilon$,即 $f(x)$ 在区间 I 一致连续.

(2) 在(1)中令 $g(x)=x$,则 $g(x)=x$ 在区间 I 一致连续,由(1)可推知结论.

或者如下证明:对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=(\varepsilon/M)^{\frac{1}{\alpha}}>0,\forall x_1,x_2\in I$,且$|x_1-x_2|<\delta$,有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|^{\alpha}<\varepsilon$,即 $f(x)$ 在区间 I 一致连续.

(3) $f'(x)$ 在区间 I 有界,即 $\exists M>0,\forall x\in I$,有 $|f'(x)|\leqslant M$,

由 Lagrange 中值定理知,$\forall x_1,x_2\in I$, $|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)||x_1-x_2|$

$\leqslant M|x_1-x_2|$，由(2)可推知结论.

例 1.5.10　函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是对区间 I 上任意两个数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时，就有 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$.

证明　必要性　任取 $\{x_n\},\{y_n\}\subset I$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$.

因 $f(x)$ 在 I 上一致连续，故

对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_1,x_2\in I$，且 $|x_1-x_2|<\delta$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

因 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，故

对上述 $\delta>0,\exists N\in\mathbf{N}_+,\forall n>N,|x_n-y_n|<\delta$，进而 $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon$，

$$\text{即}\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0.$$

充分性(反证法)

假设 $f(x)$ 在区间 I 上非一致连续，即

$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x_1,x_2\in I$，虽然 $|x_1-x_2|<\delta$，但是 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0$.

令 $\delta=\dfrac{1}{n},n=1,2,\cdots$，

则
$$\exists x_n,y_n\in I,|x_n-y_n|<\frac{1}{n},\text{有}|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0,$$

如此得到的数列满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]\neq0$，矛盾.

注　例1.5.10可视作函数一致连续性的Heine(海涅)定理，其证法和用法与函数极限的Heine定理类似.

再看前面的命题：若函数 $f(x)$ 在区间 I 连续，且在 I 的端点处相应单侧极限存在，则 $f(x)$ 在区间 I 一致连续且有界. 有了这个命题，当我们讨论区间 I 上的连续函数的一致连续性时，往往会在端点处下功夫. 特别是，对于某区间 I 上连续而非一致连续的函数而言，造成非一致连续的原因一定是该函数在区间 I 的某个端点附近不够“平缓”，即函数在端点局部的剧烈变化破坏了一致连续这一整体性质.

例如 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x},x\in(0,+\infty)$，在0附近变化剧烈，在0附近选取

$$x_n=\frac{1}{2n\pi},y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$$

既能证出 $\lim\limits_{x\to0^+}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，又能说明 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 非一致连续.

再如，$f(x)=\ln x, x\in(0,+\infty)$，由于有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，故 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 非一致连续.

在 0 附近选取 $x_n=e^{-n}, y_n=e^{-(n+1)}$，亦能说明 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 非一致连续.

例 1.5.11 函数 $f(x)=x^\alpha$ 在 $[0,+\infty)$ 上，(1) 当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时一致连续；(2) 当 $\alpha>1$ 时非一致连续.

证明 对于(1)，我们提供如下两种证法.

证法一 $[0,+\infty)=[0,1]\cup[1,+\infty)$，由康托定理知，$f(x)=x^\alpha$ 在 $[0,1]$ 一致连续. 下证 $f(x)=x^\alpha$ 在 $[1,+\infty)$ 上的一致连续性.

事实上，当 $\alpha=1$ 时，$f(x)=x$ 显然在 $[1,+\infty)$ 一致连续；

当 $0<\alpha<1$ 时，由 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ 在 $[1,+\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha x^{\alpha-1}=0$ 可推知 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ 在 $[1,+\infty)$ 有界(见例 1.5.6)，进而 $f(x)=x^\alpha$ 在 $[1,+\infty)$ 一致连续(见例 1.5.9).

因为 $f(x)=x^\alpha$ 分别在 $[0,1]$，$[1,+\infty)$ 一致连续，故 $f(x)=x^\alpha$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续(见例 1.5.8).

证法二 首先证明当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，对 $\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$，有不等式

$$(x_1+x_2)^\alpha\leqslant x_1^\alpha+x_2^\alpha \tag{1.5.1}$$

当 $\alpha=1$ 或 x_1,x_2 至少有一个为零时，(1.5.1) 式显然成立；

当 $0<\alpha<1$ 且 x_1,x_2 都不为零时，$(x_1+x_2)^{\alpha-1}\leqslant x_1^{\alpha-1}$，$(x_1+x_2)^{\alpha-1}\leqslant x_2^{\alpha-1}$，进而，

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)^\alpha&=(x_1+x_2)^{\alpha-1}(x_1+x_2)\\&=x_1(x_1+x_2)^{\alpha-1}+x_2(x_1+x_2)^{\alpha-1}\leqslant x_1^\alpha+x_2^\alpha,\end{aligned}$$

故不等式(1.5.1) 成立.

其次证明当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，对 $\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$，有不等式

$$|x_1^\alpha-x_2^\alpha|\leqslant|x_1-x_2|^\alpha \tag{1.5.2}$$

对 $\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$，不妨设 $x_1>x_2$，则 $x_1^\alpha=[(x_1-x_2)+x_2]^\alpha\leqslant(x_1-x_2)^\alpha+x_2^\alpha$，从而 $x_1^\alpha-x_2^\alpha\leqslant(x_1-x_2)^\alpha$，即式(1.5.2) 成立.

对于式(1.5.2)，就是例 1.5.9 指出的 α 阶 Lipschitz 条件，故 $f(x)=x^\alpha$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

对于(2)，我们提供如下两种证法.

证法一　令 $x_n=(n+1)^{\frac{1}{\alpha}}$，$y_n=n^{\frac{1}{\alpha}}$，虽然

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}[(n+1)^{\frac{1}{\alpha}}-n^{\frac{1}{\alpha}}]=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{\alpha}}[(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-1]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{\alpha}}-1}{(\frac{1}{n})^{\frac{1}{\alpha}}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{\alpha}}-1}{x^{\frac{1}{\alpha}}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+x)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{x^{\frac{1}{\alpha}-1}}\overset{\alpha>1}{=}0$$

但是 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=1\neq 0$，因此当 $\alpha>1$ 时 $f(x)=x^\alpha$ 在 $[0,+\infty)$ 非一致连续.

证法二　只需证 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x_1,x_2\in[0,+\infty)$，$|x_1-x_2|<\delta$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0$.

因当 $\alpha>1$ 时 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha x^{\alpha-1}=+\infty$，故

$$\text{对 }\forall\delta>0,\exists M>0,\text{当 }x>M\text{ 时，有 }f'(x)>\frac{1}{\delta},$$

这时取 $x_1,x_2>M$ 且 $\frac{\delta}{2}<|x_1-x_2|<\delta$，就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=f'(\xi)|x_1-x_2|\geqslant\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\delta}{2}=\frac{1}{2}.$$

再取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$ 即可.

上述证法二可以抽象出如下一般性命题：

函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 可导且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 非一致连续.

例 1.5.12　设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 可导，$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{1-\alpha}f'(x)=A$（有限数），其中 $0<\alpha\leqslant 1$. 求证 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 一致连续.

证明　因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{1-\alpha}f'(x)=A$，故

$$\exists M>0,\exists\delta_1(0<\delta_1<1),\text{当 }0<x<\delta_1\text{ 时，有 }|x^{1-\alpha}f'(x)|\leqslant M.$$

现任取 $x_1,x_2\in(0,\delta_1]$，不妨设 $x_1>x_2$，由 Cauchy 中值定理知，$\exists\xi$：$x_2<\xi<x_1$，使得

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^\alpha - x_2^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{\alpha}\left|\xi^{1-\alpha} f'(\xi)\right| \leqslant \frac{1}{\alpha}M$$

从而 $$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant \frac{1}{\alpha}M\left|x_1^\alpha - x_2^\alpha\right| (\leqslant \frac{1}{\alpha}M\ |x_1 - x_2|^\alpha)$$

由此推知 $f(x)$ 在$(0,\delta_1]$上一致连续,另外 $f(x)$ 在$[\delta_1,1]$也能做到一致连续,故 $f(x)$ 在区间$(0,1]$一致连续.

思考题 1.5

1. 判别函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在$(-\infty,+\infty)$上的一致连续性.

2. 判断下列函数在指定区间上的一致连续性:

(1) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$;　(6) $f(x)=\sin^3 x, x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $f(x)=\ln x, x\in(0,+\infty)$;　(7) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$;

(3) $f(x)=\sin(x\sin x), x\in(0,+\infty)$;(8) $f(x)=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty)$;

(4) $f(x)=e^x, x\in[0,+\infty)$;　(9) $f(x)=\sqrt{1+x^2}, x\in(-\infty,+\infty)$;

(5) $f(x)=\sin x^3, x\in(-\infty,+\infty)$;(10) $f(x)=\cos\sqrt{x}, x\in(-\infty,+\infty)$.

3. 证明下面三个命题:

(1) 设函数 $f(x)$ 为(a,b)上的连续单调有界函数,则 $f(x)$ 在(a,b)一致连续;

(2) 设函数 $f(x)$ 为(a,b)上有上界的凸函数,则 $f(x)$ 在(a,b)一致连续;

(3) 设函数 $f(x)$ 为(a,b)上的可导函数,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f'(x)$ 都存在,则 $f(x)$ 在(a,b)一致连续.

4. 设函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上一致连续,且对 $\forall x\in[0,+\infty)$,都有数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n+x)=0$,求证:$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

5. 设函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上一致连续,且对 $\forall x>0$,都有数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(nx)=0$,求证:$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

1.6　多元函数极限与连续

1.6.1　坐标平面 $\mathbf{R}^2$ 中的序列极限的概念

我们在坐标平面 $\mathbf{R}^2$ 建立序列极限的概念.

定义 1.6.1　点列 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0 指的是:$\rho(P_n,P_0)\to 0(n\to\infty)$,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 或简单地记作 $P_n\to P_0$. P_0 称为 $\{P_n\}$ 的极限.

注　点列 $\{P_n\}$ 如果收敛,则其极限是唯一的. 又若 $\{P_n\}$ 收敛到 P_0,则 $\{P_n\}$ 的任一子列 $\{P_{n_k}\}$ 也收敛到 P_0.

这里顺便再强调一下距离和邻域等相关概念.

设 $P_1,P_2\in R^2$,坐标分别是 (x_1,y_1),(x_2y_2),P_1,P_2 的距离定义为:

$$\rho(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域有两种:

$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\,\big|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta,\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2\}$(圆形邻域);

$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\,|\,x|-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta,\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2\}$(方形邻域);

$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)\,\big|\,0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta,\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2\}$(圆形空心邻域);

$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)\,|\,x|-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta,(x,y)\neq(x_0,y_0)\}$(方形空心邻域).

平面点集 $E\subseteq\mathbf{R}^2$ 的直径定义为

$$d(E)=\sup_{\forall P_1,P_2\in E}\rho(P_1,P_2).$$

与一维情形一样,平面点集 E 有界当且仅当 E 的直径 $d(E)<+\infty$.

定义 1.6.2　设 $E\subset\mathbf{R}^2$,$E\neq\varnothing$,$P_0\in\mathbf{R}^2$. P_0 是 E 的聚点指的是

$\forall\delta>0$,$\mathring{U}(P_0,\delta)\cap E\neq\varnothing$,$E$ 是闭集指的是 E 的聚点都属于 E.

此外,P_0 是 E 的界点指的是 $\forall\delta>0$,$U(P_0,\delta)$ 中既有属于 E 的点,又有不属于 E 的点,E 的全部界点所成之集称为 E 的边界,记作 ∂E.

例 1.6.1 设$\{P_n\}$，$\{Q_n\}$是$\mathbf{R}^2$中的点列，且$P_n \to P_0$，$Q_n \to Q_0$，则$\rho(P_n, Q_n) \to \rho(P_0, Q_0)$.

利用不等式$|\rho(P_1, P_2) - \rho(P_3, P_4)| \leqslant \rho(P_1, P_3) + \rho(P_2, P_4)$，其中$\forall P_i (i = 1,2,3,4) \in \mathbf{R}^2$，可以证明该结论.

聚点、闭集可用点列刻划，如例 1.6.2 所示.

例 1.6.2 (1)P_0是E的聚点当且仅当E中存在互异点列$\{P_n\}$，$P_n \neq P_0$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$；

(2)E是闭集当且仅当对E中任意点列$\{P_n\}$，且$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$，都有$P_0 \in E$.

证明 (1) 充分性显然，下证必要性.

因P_0是E的聚点，故$\forall \delta > 0$，$\mathring{U}(P_0, \delta) \cap E \neq \varnothing$，

取 $$\delta_1 = 1,\ \exists P_1 \in \mathring{U}(P_0, 1) \cap E,$$

取 $$\delta_2 = \min\{\frac{1}{2}, \rho(P_1, P_0)\},\ \exists P_2 \in \mathring{U}(P_0, \delta_2) \cap E,$$

$$\vdots$$

一般地，

取 $$\delta_n = \{\frac{1}{n}, \rho(P_{n-1}, P_0)\},\ \exists P_n \in \mathring{U}(P_0, \delta_n) \cap E,$$

如此构造的点列$\{P_n\}$符合要求.

(2) 充分性

设P_0是E的聚点，由(1)的必要性知，存在E中互异点列$\{P_n\}$，$P_n \neq P_0$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$，再由充分性条件知，$P_0 \in E$，由闭集定义知，$E$是闭集.

必要性

对E中任意点列$\{P_n\}$，且$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$，

若点列$\{P_n\}$中有与P_0相同的项，则$P_0 \in E$；

若$\{P_n\}$中没有与P_0相同的项，则存在互异子列$\{P_{n_k}\}$，$P_{n_k} \neq P_0$，有$\lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k} = P_0$，由(1)的充分性知$P_0$是$E$的聚点，又$E$是闭集，故仍有$P_0 \in E$.

例 1.6.3 设$E \subseteq \mathbf{R}^2$，证明：$E \cup \partial E$为闭集.

证明 设P_0是$E \cup \partial E$的聚点，往证$P_0 \in E \cup \partial E$.

若$P_0 \in E$，则$P_0 \in E \cup \partial E$.

若 $P_0 \notin E$，则由 P_0 是 $E \cup \partial E$ 的聚点知，$\forall \delta > 0$，$\exists P_\delta \in \mathring{U}(P_0, \delta) \cap (E \cup \partial E)$.

若 $P_\delta \in E$，则 $U(P_0, \delta)$ 中既有属于 E 的点($P_\delta \in E$)，又有不属于 E 的点($P_0 \notin E$).

若 $P_\delta \notin E$，则 $P_\delta \in \partial E$. 当 ε 充分小时，$U(P_\delta, \varepsilon) \subset U(P_0, \delta)$，$U(P_\delta, \varepsilon)$ 中既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，从而 $U(P_0, \delta)$ 中既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点. 总之，$\forall \delta > 0$，$U(P_0, \delta)$ 中既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，$P_0 \in \partial E \subseteq E \cup \partial E$.

$\mathbf{R}^2$ 中的聚点定理叙述为有界无限点集至少有一个聚点.

利用聚点的等价定义(例 1.6.2(1))，可将上述定理叙述为致密性定理：有界点列必有收敛子列.

下面的例 1.6.4 是对致密性定理以及本节关键知识点的综合应用.

例 1.6.4　设 $E \subseteq \mathbf{R}^2$ 是有界闭集，证明：存在 $P_1, P_2 \in E$，使得 $\rho(P_1, P_2) = d(E)$.

证明　因 $d(E) = \sup\limits_{\forall P_1, P_2 \in E} \rho(P_1, P_2)$，故对 $\varepsilon = \dfrac{1}{n}(n = 1, 2, \cdots)$，$\exists P_n, Q_n \in E$，使得

$$d(E) - \frac{1}{n} < \rho(P_n, Q_n) \leqslant d(E).$$

E 是有界的，故 $\{P_n\}\{Q_n\}$ 为有界点列，从而有收敛子列(两个收敛子列的足标还能够做到相同)$\{P_{n_k}\}\{Q_{n_k}\}$，且

$$d(E) - \frac{1}{n_k} < \rho(P_{n_k}, Q_{n_k}) \leqslant d(E).$$

设 $\lim\limits_{k \to \infty} P_{n_k} = P_1$，$\lim\limits_{k \to \infty} Q_{n_k} = P_2$，则 $\rho(P_{n_k}, Q_{n_k}) \to \rho(P_1, P_2)(k \to \infty)$，对上述不等式取 $k \to \infty$ 得，$\rho(P_1, P_2) = d(E)$. 又 E 是闭的，故还有 $P_1, P_2 \in E$.

1.6.2　多元函数极限

定义 1.6.3　设 $f(P)$ 在平面点集 D 上有定义，P_0 是 D 的聚点. 若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \in \mathring{U}(P_0, \delta) \cap D, 有 |f(P) - A| < \varepsilon$$

则称 $f(P)$ 在点 P_0 存在极限 A，记作 $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P) = A$.

当用(x,y),(x_0,y_0)表示P和P_0的坐标时,二元函数极限(又称二重极限)刻划为:

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall(x,y)\in D$,且$|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$, $(x,y)\neq(x_0,y_0)$,有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

注意这里的"$|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta, (x,y)\neq(x_0,y_0)$"

不能用"$0<|x-x_0|<\delta, 0<|y-y_0|<\delta$"来替换,但能用"$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$"替换.

例 1.6.5 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}(x^2+xy+y^2)=7$.

证法一 采用方邻域.

因
$$|x^2+xy+y^2-7|=|(x^2-4)+(xy-2)+(y^2-1)|$$
$$=|(x+2)(x-2)+x(y-1)+(x-2)+(y+1)(y-1)|$$
$$\leqslant|x-2||x+3|+|y-1||x+y+1|.$$

限制$\{(x,y)\,|\,|x-2|<1, |y-1|<1\}$,则
$$|x+3|=|x-2+5|\leqslant|x-2|+5<6,$$
$$|x+y+1|=|x-2+y-1+4|\leqslant|x-2|+|y-1|+4<6,$$

于是,$|x^2+xy+y^2-7|\leqslant 6(|x-2|+|y-1|)$,

对 $\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{12}\}$,则当$|x-2|<\delta, |y-1|<\delta, (x,y)\neq(2,1)$时,有$|x^2+xy+y^2-7|<6\times2\delta=12\delta\leqslant\varepsilon$,

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}(x^2+xy+y^2)=7$.

证法二 采用圆邻域. 令$x=2+\rho\cos\theta, y=1+\rho\sin\theta(\rho\in(0,+\infty), \theta\in[0,2\pi])$,则
$$(x,y)\to(2,1)\Leftrightarrow\rho\to0, (\rho=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2})$$
$$|x^2+xy+y^2-7|=|(2+\rho\cos\theta)^2+(2+\rho\cos\theta)(1+\rho\sin\theta)+(1+\rho\sin\theta)^2-7|$$
$$=|\rho^2+\rho^2\cos\theta\sin\theta+5\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta|$$
$$\leqslant2\rho^2+9\rho<11\rho(\text{限制 }0<\rho<1).$$

对 $\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{11}\}$,当$0<\rho=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}<\delta$时,有

$|x^2+xy+y^2-7|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}(x^2+xy+y^2)=7$.

例 1.6.6　设函数 $f(x,y)=\dfrac{3x^2-y^2}{x^2+y^2}$，分别在 $D_1=\{(x,y)\,|\,|y|<x^2\}$ 和 $D_2=\{(x,y)\,|\,(x,y)\neq 0\}$ 两个不同定义范围内研究 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$.

解　当 $(x,y)\in D_1=\{(x,y)\,|\,|y|<x^2\}$ 时，

$$\left|\frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2}-3\right|=\left|\frac{4y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{4|y|x^2}{x^2+y^2}\leqslant 2|x|,$$

从而推得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

当 $(x,y)\in D_2=\{(x,y)\,|\,(x,y)\neq 0\}$ 时，取 $y=kx$，则

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=kx}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-k^2}{1+k^2}=\dfrac{3-k^2}{1+k^2}$，说明此时 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

例 1.6.7　求下列极限

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$；(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解　(1) 令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{1}{4}\rho^2\sin 4\theta=0.$$

(2) 令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2y^2\ln(x^2+y^2)}=e^{\lim\limits_{\rho\to 0^+}2\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta\ln\rho}=1.$$

其中，$\lim\limits_{\rho\to 0^+}\rho^4\ln\rho=0$，这里 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

例 1.6.8　讨论下列极限的存在性

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$；(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x-y^2+y^3}{2x+y^2}$；(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$.

解　(1)
$$\lim_{\substack{x\to 0\\y=kx}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^4}{k^2x^4+(1-k)^2x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{k^2x^2+(1-k)^2}=\begin{cases}1,k=1\\0,k\neq 1\end{cases},$$

沿不同直线路径趋于原点时极限不同，故极限(1)不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y^2+y^3}{2x+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-y^2+y^3}{2x+y^2}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y^2+y^3}{y^2}=$

-1，两个累次极限存在但不等，故极限(2)不存在.

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x}=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x}}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(x-1)}{x^2}=-1$，沿不同路径趋于原点时极限不同，故极限(3)不存在.

1.6.3 多元连续函数

定义 1.6.4 设 f 在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 有定义，f 在 D 上连续指的是

$\forall p_0\in D,\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P\in U(P_0,\delta)\cap D$，有 $|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon$.

注 D 中的点要么是 D 的聚点，要么是 D 的孤立点.

如果 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域有定义，函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的全增量表示为

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

则 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z=0$，这里 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

定义 1.6.5 f 在 D 上一致连续指的是

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_0>0,\forall P',P''\in D$，且 $\rho(P',P'')<\delta_0$，有 $|f(P')-f(P'')|<\varepsilon$.

例 1.6.9 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有定义，且分别关于 x 和 y 连续，关于 x 是单调递增的，则 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 连续.

证明 对 $\forall(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，由 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上分别关于 x 和 y 连续，推知 $f(x,y_0)$ 在 x_0 处连续，即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，有 $f(x_0,y_0)-\varepsilon<f(x_0\pm\delta_1,y_0)<f(x_0,y_0)+\varepsilon$.

又 $f(x_0+\delta_1,y),f(x_0-\delta_1,y)$ 在 y_0 连续，对上述 $\varepsilon>0,\exists\delta_2>0$，当 $|y-y_0|<\delta_2$ 时，有

$$f(x_0\pm\delta_1,y_0)-\varepsilon<f(x_0\pm\delta_1,y)<f(x_0\pm\delta_1,y_0)+\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$ 时，由上述及 $f(x,y)$ 关于 x 单调递增知，

$$f(x,y)\leqslant f(x_0+\delta,y)\leqslant f(x_0+\delta_1,y)<f(x_0+\delta_1,y_0)+\varepsilon<f(x_0,y_0)+2\varepsilon.$$

同理 $f(x,y)>f(x_0,y_0)-2\varepsilon$，就有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<2\varepsilon$.

综上，$f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 连续.

例 1.6.10 设 f 在有界开集 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上一致连续，则 f 在 D 上有界.

证明　因为有界闭集上的连续函数一定有界，故只需证 f 可连续延拓到 $D\cup\partial D$（根据例1.6.3，$D\cup\partial D$ 为有界闭集）.

以下分两步证明.

(1) 证明当 $P_0\in\partial D$ 时，$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)$ 存在，并由此构造有界闭集 $D\cup\partial D$ 上函数 $F(P)$. 因 f 在 D 上一致连续，故

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_0>0,\forall P',P''\in D,\text{且 }\rho(P',P'')<\delta_0,\text{有 }|f(P')-f(P'')|<\varepsilon \tag{1.6.1}$$

对于 $P_0\in\partial D$（开集 D 的边界点必为 D 的聚点），取 $\delta_1=\dfrac{\delta_0}{2}$，（对 $\forall P_0\in\partial D$ 是一致的），则

对 $\forall P',P''\in\mathring{U}(P_0,\delta_1)\cap D$，有 $\rho(P',P'')\leqslant\rho(P',P_0)+\rho(P'',P_0)<\delta_0$，

进而 $|f(P')-f(P'')|<\varepsilon$，于是

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,\forall P_0\in\partial D,\forall P',P''\in\mathring{U}(P_0,\delta_1)\cap D$，有

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon \tag{1.6.2}$$

由 Cauchy 准则知，$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)$ 存在.

构造函数
$$F(P)=\begin{cases}f(P), & P\in D\\ \lim\limits_{\substack{Q\to P\\Q\in D}}f(Q), & P\in\partial D\end{cases}$$

(2) 证明 $F(P)$ 在有界闭集 $D\cup\partial D$ 上连续.

对 $\forall P_0\in D\cup\partial D$，（往证 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D\cap\partial D}}F(P)=F(P_0)$）

当 $P_0\in D$ 时，$\exists U(P_0)\subset D$，从而

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in D\cap\partial D}}F(P)=\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in U(P_0)}}f(P)=f(P_0)=F(P_0).$$

当 $P_0\in\partial D$ 时，在式(1.6.2)中，固定 $P'\in\mathring{U}(P_0,\delta_1)\cap D$，令 $P''\to P_0$，因 $\lim\limits_{\substack{P''\to P_0\\P''\in D}}f(P'')=F(P_0)$，就有 $|f(P')-F(P_0)|\leqslant\varepsilon$，即

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,\forall P_0\in\partial D,\forall P'\in\mathring{U}(P_0,\delta_1)\cap D$，有

$$|f(P')-F(P_0)|\leqslant\varepsilon \tag{1.6.3}$$

取 $\delta=\frac{\delta_1}{2}$，任取 $P'\in \mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$ 并固定，对 $\forall P\in U(P_0,\delta)\cap(D\cup\partial D)$，因 $\rho(P,P')\leqslant\rho(P,P_0)+\rho(P',P_0)<\delta_1<\delta_0$，故

若 $P\in D$，由 $P,P'\in D$ 且 $\rho(P,P')<\delta_0$ 及式(1.6.1)推得

$$|F(P)-f(P')|=|f(P)-f(P')|<\varepsilon.$$

若 $P\in\partial D$，由 $\rho(P,P')<\delta_1$ 推知 $P'\in\mathring{U}(P,\delta_1)\cap D$，再据式(1.6.3)推得

$$|F(P)-f(P')|\leqslant\varepsilon.$$

再由 $P'\in\mathring{U}(P_0,\delta)\cap D\subset\mathring{U}(P_0,\delta_1)\cap D$ 及式(1.6.3)推得

$$|f(P')-F(P_0)|\leqslant\varepsilon.$$

从而 $\quad |F(P)-F(P_0)|\leqslant|F(P)-f(P')|+|f(P')-F(P_0)|\leqslant 2\varepsilon$，即

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P\in U(P_0,\delta_2)\cap(D\cup\partial D)$，有 $|F(P)-F(P_0)|\leqslant 2\varepsilon$，

于是 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D\cap\partial D}}F(P)=F(P_0)$.

综上，$F(P)$ 在 P_0（无论 $P_0\in\partial D$，还是 $P_0\in\partial D$）连续，从而 $F(P)$ 在有界闭集 $D\cup\partial D$ 上连续.

进一步，$F(P)$ 在 $D\cup\partial D$ 上有界，由于在 D 上 $F=f$，所以 f 在 D 上有界.

思考题 1.6

1. 证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$ 在原点(0,0)的极限是 0.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^\alpha+y^\alpha}{x^2+y^2}(\alpha>2)$；(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$；(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$；(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^6y^{10}}{(x^3+y^6)^4}$.

4. 若在开区域 D 上，函数 $f(x,y)$ 关于 x 连续，且满足条件 $\forall(x,y_1),(x,y_2)\in D,\exists L>0$，使得 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|$，则 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

第 2 章　级数与无穷积分

本章内容分为四节介绍,第一节介绍与数项级数、无穷积分的敛散性有关的一些例子;第二节是函数项级数与含参量无穷积分的一致收敛性问题;第三节叙述了一致收敛与分析性质的密切联系;第四节是幂级数的内容.

2.1　数项级数与无穷积分的敛散性

本节介绍数项级数的敛散性以及一些典型的例子,在无穷积分的敛散性方面,我们仅给出当无穷积分收敛时被积函数在无穷远处极限为零的一些充分条件.

2.1.1　数项级数的敛散性

1. 数项级数敛散性概念的应用

根据数项级数的敛散性的概念,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛和发散转化为其部分和数列 $\{S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k\}$ 的收敛和发散.

例 2.1.1　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n}$ 的和.

解法一(裂项相消)

$$\frac{2n-1}{3^n}=\frac{3n-(n+1)}{3^n}=\frac{n}{3^{n-1}}-\frac{n+1}{3^n},$$

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{2-1}{3}+\frac{2\times2-1}{3^2}+\cdots+\frac{2n-1}{3^n}\\&=\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{3^{n-1}}-\frac{n+1}{3^n}\right)=1-\frac{n+1}{3^n},\end{aligned}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n+1}{3^n}\right)=1.$$

表 2－1　数项级数、无穷积分敛散性对照表

		数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$	无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$
收敛概念		$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = S$，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N_+$，$\forall n > N$，有 $\lvert S_n - S\rvert < \varepsilon$，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = J$，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists A > 0$，$\forall x > A$，有 $\left\lvert \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - J \right\rvert < \varepsilon$，称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛于 J.
收敛判别法	Cauchy 准则收敛	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N_+$，$\forall n > N$，$\forall p \in N_+$，有 $\left\lvert \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\rvert < \varepsilon$.	$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists A > 0$，$\forall x_1, x_2 > A$，有 $\left\lvert \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \right\rvert < \varepsilon$.
	绝对收敛	若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert u_n \rvert$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$（绝对）收敛.	若 $\int_a^{+\infty} \lvert f(x)\rvert\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$（绝对）收敛.
	狄利克雷判别法	若 u_n 可以分解为 $u_n = a_n b_n$，其中 $\{a_n\}$ 单调趋于 0，$\{B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\}$ 有界，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛（莱布尼兹判别法为其特殊情况）.	若 $f(x)$ 可以分解为 $f(x) = a(x)b(x)$，其中 $a(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调且当 $x \to +\infty$ 时趋于 0，函数 $B(x) = \int_a^x b(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a, +\infty)$ 有界，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.
	阿贝尔判别法	若 u_n 可以分解为 $u_n = \alpha_n \beta_n$，其中 $\{\alpha_n\}$ 单调有界，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.	若 $f(x)$ 可以分解为 $f(x) = \alpha(x)\beta(x)$，其中 $\alpha(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调有界，无穷积分 $\int_a^{+\infty} \beta(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.
常用结论		$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 当 $p \leqslant 1$ 时发散，当 $p > 1$ 时收敛.	$\int_a^{+\infty} \dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x\,(a > 0)$ 当 $p \leqslant 1$ 时发散，当 $p > 1$ 时收敛.
		$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^p}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^p}$ 当 $0 < p \leqslant 1$ 时条件收敛，当 $p > 1$ 时绝对收敛.	$\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 当 $0 < p \leqslant 1$ 时条件收敛，当 $p > 1$ 时绝对收敛.

解法二（错位相减）

$$S_n = \frac{2-1}{3} + \frac{2\times 2-1}{3^2} + \frac{2\times 3-1}{3^3} \cdots + \frac{2n-1}{3^n},$$

$$\frac{1}{3}S_n = \frac{2-1}{3^2} + \frac{2\times 2-1}{3^3} + \cdots + \frac{2(n-1)-1}{3^n} + \frac{2n-1}{3^{n+1}},$$

则 $\frac{2}{3}S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} - \frac{2n-1}{3^{n+1}}, S_n = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3^n} - \frac{2n-1}{3^{n+1}}\right),$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3^n} - \frac{2n-1}{3^{n+1}}\right) = 1.$$

例 2.1.2　证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

证法一　由式(1.2.2)推知 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$,

于是 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1)$.

故 $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

证法二　由 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 知,

$$S_1 = 1, S_2 = 1 + \frac{1}{2}, S_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2\text{项}} > 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{2\text{项}} > 1 + \frac{2}{2},$$

$$S_{2^3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{4\text{项}} > 1 + \frac{2}{2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}}_{4\text{项}} > 1 + \frac{3}{2},$$

更一般地,有 $S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2} \to +\infty (k\to\infty)$,故 $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

证法三　当 $n \geqslant 2$ 时,

$$S_{2n} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) > 1 + \frac{1}{2}S_n$$

$$+ \left(\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = 1 + \frac{1}{2}S_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + S_n,$$

于是,　$S_4 > \frac{1}{2} + S_2 = 1 + \frac{2}{2}, S_8 > \frac{1}{2} + S_4 > 1 + S_2 = 1 + \frac{3}{2},$

更一般地,有 $S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2} \to +\infty (k\to\infty)$,故 $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

（或者假设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$收敛，则$\lim_{n\to\infty}S_n=S$，对$S_{2n}>\frac{1}{2}+S_n$取$n\to\infty$的极限得，$S\geqslant\frac{1}{2}+S$，即$\frac{1}{2}\leqslant 0$，而这是不可能的.）

证法四 $\exists\,\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$\forall N\in N_+$，$\exists\, n_0>N$，$\exists\, p_0=n_0$，有

$$|S_{n_0+p_0}-S_{n_0}|=\frac{1}{n_0+1}+\frac{1}{n_0+2}+\cdots+\frac{1}{2n_0}>\frac{n_0}{2n_0}=\frac{1}{2},$$

由 Cauchy 收敛准则知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

2. 正项级数的敛散性

正项级数敛散性判别有如下几种常用的方法.

(1) 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是其部分和数列$\{S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k\}$有上界.

(2)（比较判别法）正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，且$\exists N\in N_+$，$\forall n>N$，有$u_n\leqslant v_n$，则当$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

(3)（比较判别法极限形式）正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，且$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，则

当$0\leqslant l<+\infty$且$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

当$0<l\leqslant+\infty$且$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

(4)（比式判别法和根式判别法极限形式）正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，且$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$（或$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$），则当$l<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当$l>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

例 2.1.3 证明 P 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$当$p\leqslant 1$时发散，当$p>1$时收敛.

证明 设该正项级数的前n部分和数列为$\{S_n\}$，当$n\geqslant 2$时，

$$S_{2n}=1+\left(\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}\right)+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right)$$

$$<1+\left(\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^p}\right)+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right)$$

$$<1+2\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right)=1+\frac{1}{2^{p-1}}S_n.$$

又 $S_n<S_{2n}$，故 $S_n<1+\frac{1}{2^{p-1}}S_n$，

当 $p>1$ 时，就有 $S_n<\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2^{p-1}}}$，$\{S_n\}$ 有上界，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛.

当 $p\leqslant 1$ 时，由 $\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

例 2.1.4　证明当 $a>0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ 收敛.

证法一（用正项级数收敛的充要条件）

设该正项级数的部分和数列为 $\{S_n\}$，往证 $\{S_n\}$ 有上界.

事实上，
$$S_n=\frac{a}{1+a}+\frac{a^2}{(1+a)(1+a^2)}+\cdots+\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$$

$$=\frac{a+1-1}{1+a}+\frac{a^2+1-1}{(1+a)(1+a^2)}+\cdots+\frac{a^n+1-1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{1+a}\right)+\left(\frac{1}{1+a}-\frac{1}{(1+a)(1+a^2)}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{n-1})}-\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}\right)$$

$$=1-\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}<1.$$

故当 $a>0$ 时该级数收敛.

证法二（用比较判别法）

讨论如下：当 $0<a<1$ 时，

$$\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}<a^n\text{，且}\sum_{n=1}^{\infty}a^n\text{ 收敛.}$$

当 $a\geqslant 1$ 时，

$$\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}=\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{n-1})}\cdot\frac{a^n}{(1+a^n)}$$

$$<\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{n-1})}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}},$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛,由比较判别法知当 $a>0$ 时该级数收敛.

证法三(用比值判别法)

设 $u_n=\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$,

则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1+a^{n+1}}=\begin{cases}a, & 0<a<1\\ \frac{1}{2}, & a=1\\ 0, & a>1\end{cases},$$

由比值判别法知,当 $a>0$ 时该级数收敛.

证法四(用根式判别法) 设 $u_n=\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$,

因 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a^n)=\begin{cases}1, & 0<a<1\\ 2, & a=1\\ +\infty, & a>1\end{cases}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}=\begin{cases}1, & 0<a<1\\ 2, & a=1\\ +\infty, & a>1\end{cases},$$

从而
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt[n]{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}}=\begin{cases}a, & 0<a<1\\ \frac{1}{2}, & a=1\\ 0, & a>1\end{cases},$$

由根式判别法知,当 $a>0$ 时该级数收敛.

3. 一般项级数的敛散性

对于一般项级数先要考虑是否绝对收敛,对于条件收敛的判别主要有狄利克雷判别法和阿贝尔判别法.

例 2.1.5 判别 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ 的敛散性.

证法一(用莱布尼兹判别法)

注意到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}$是交错级数,令$a_n=\dfrac{n}{n+1}\dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}$,显然$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

因为　　当$x>4$时,$\left(\dfrac{x^{\frac{4}{5}}}{x+1}\right)'=\dfrac{\frac{1}{5}x^{\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{x}-1\right)}{(x+1)^2}<0$,

所以当$n\geqslant 4$时,$\{a_n\}$单调减少,根据莱布尼兹判别法知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}$收敛.

证法二(用阿贝尔判别法)　令$a_n=\dfrac{n}{n+1}$,$b_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}$,

则$\{a_n\}$单调有界,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}$收敛,根据阿贝尔判别法知,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\text{收敛.}$$

2.1.2　无穷积分的敛散性

无穷积分的敛散性判别类似于数项级数(见表 2-1),不再列举例题.在此,我们仅给出当无穷积分收敛时被积函数在无穷远处极限为零的一些充分条件,在命题的证明过程中注意分部积分法的运用.

例 2.1.6　若$f(x)$是$[a,+\infty)$上的单调函数,$a>0$,$p\geqslant 0$,且$\int_a^{+\infty}x^pf(x)\mathrm{d}x$收敛,则$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{p+1}f(x)=0$.

证明　只对$f(x)$是$[a,+\infty)$上的单调递减函数($f(x)$递增情形可转而考虑$-f(x)$).

首先证明$f(x)\geqslant 0$,$\forall x\in[a,+\infty)$.

若不然,假设$\exists x_1\in[a,+\infty)$,使得$f(x_1)<0$.

由$f(x)$递减,故当$x\geqslant x_1$时,有$f(x)\leqslant f(x_1)<0$,进而$x^pf(x)\leqslant x^pf(x_1)$.由$\int_a^{+\infty}x^pf(x_1)\mathrm{d}x=f(x_1)\int_a^{+\infty}x^p\mathrm{d}x=-\infty$得,$\int_a^{+\infty}x^pf(x)\mathrm{d}x=-\infty$,这与$\int_a^{+\infty}x^pf(x)\mathrm{d}x$收敛矛盾.

因$\int_a^{+\infty} x^p f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\forall \varepsilon > 0, \exists G \geqslant a, \forall u_1, u_2 > G(u_1 < u_2)$，有

$$\int_{u_1}^{u_2} x^p f(x)\mathrm{d}x = \left|\int_{u_1}^{u_2} x^p f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}},$$

当 $x > 2G$ 时，就有

$$0 \leqslant x^{p+1} f(x) = 2^{p+1}\int_{\frac{x}{2}}^{x} \left(\frac{x}{2}\right)^p f(x)\mathrm{d}t \leqslant 2^{p+1}\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^p f(t)\mathrm{d}t < \varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{p+1} f(x) = 0$.

注 例 2.1.6 中 $a > 0$ 的要求只是为了使 $p \geqslant 0$ 时 x^p 有意义，同时可看出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 蕴涵在 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{p+1} f(x) = 0 (p \geqslant 0)$ 之中.

例 2.1.7 $\int_a^{+\infty} x^{p+1} f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$f'(x) \leqslant 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，$a > 0$，$p \geqslant 0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{p+1} f(x) = 0$.

证明 因$\int_a^{+\infty} x^{p+1} f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛，故

对 $\forall \varepsilon > 0, \exists A > a$，当 $u > A$ 时，有

$$\left|\int_u^{+\infty} x^{p+1} f'(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 及 $f(x) \geqslant 0, f'(x) \leqslant 0, x \in [a, +\infty)$，则当 $u > A$ 时有，

$$\begin{aligned}\varepsilon > \left|\int_u^{+\infty} x^{p+1} f'(x)\mathrm{d}x\right| \geqslant \left|\int_u^{+\infty} u^{p+1} f'(x)\mathrm{d}x\right| &= |u^{p+1}(f(+\infty) - f(u))| \\ &= |u^{p+1} f(u)|,\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{p+1} f(x) = 0$.

注 在例 2.1.7 条件下可进一步推得：

$\int_a^{+\infty} x^p f(x)\mathrm{d}x$ 收敛且$\int_a^{+\infty} x^{p+1} f'(x)\mathrm{d}x + (p+1)\int_a^{+\infty} x^p f(x)\mathrm{d}x = -a^{p+1} f(a)$.

这只需注意到

$$\int_a^u x^{p+1} f'(x)\mathrm{d}x = u^{p+1} f(u) - a^{p+1} f(a) - (p+1)\int_a^u x^p f(x)\mathrm{d}x.$$

思考题 2.1

1. 应用 Cauchy 收敛准则证明下列问题：

(1) 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 是收敛的；

(2) 证明：若正项级数 $\sum a_n$ 收敛，且数列 $\{a_n\}$ 单调，则 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$；

(3) 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛，且 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n(n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也收敛；

(4) 证明：级数 $\sum a_n$ 收敛，$\sum(b_{n+1}-b_n)$ 绝对收敛，则级数 $\sum a_nb_n$ 收敛.

2. 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq\pm\infty$.

3. 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，则 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

4. 若 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的单调递减且连续可微的函数，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow\int_a^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x=-af(a)$.

5. 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的凸函数，则 $\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$.

2.2　函数项级数与含参量无穷积分的一致收敛性

表2-2　函数项级数、含参量无穷积分一致收敛性对照表

	函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),\forall x\in I$(区间)	含参量无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x,u\in I$(区间)
一致收敛概念	$\forall x\in I,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛于 $S(x)$ 且 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall n>N,\forall x\in I$，有 $\lvert S_n(x)-S(x)\rvert<\varepsilon$，称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 一致收敛于 $S(x)$.	$\forall u\in I,\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 收敛于 $J(u)$，且 $\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall x>A,\forall u\in I$，有 $\left\lvert\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x-J(u)\right\rvert=\left\lvert\int_A^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\right\rvert<\varepsilon$，称 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 I 一致收敛于 $J(u)$.

续表 2-2

		函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x),\forall x\in I$(区间)	含参量无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x,u\in I$(区间)
一致收敛判别法	柯西一致收敛准则	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall n>N,\forall p\in N_+,\forall x\in I$，有 $\left\|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right\|<\varepsilon$.	$\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在区间 I 一致收敛 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall x_1,x_2>A,\forall u\in I$，有 $\left\|\int_{x_1}^{x_2}f(x,u)\mathrm{d}x\right\|<\varepsilon$.
	M 判别法	若 $\|u_n(x)\|\leqslant a_n,n\in N_+,x\in I$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 一致收敛.	若 $\|f(x,u)\|\leqslant g(x),\forall(x,u)\in[a,+\infty)\times I$，且 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 I 一致收敛.
	狄利克雷判别法	若 $u_n(x)$ 可分解为 $u_n(x)=a_n(x)b_n(x)$，① 对 $\forall x\in I$(固定)，$\{a_n(x)\}$ 单调，$\{a_n(x)\}$ 在 I 一致收敛于 0，② $\{B_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k(x)\}$ 在 I 一致有界，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 一致收敛.	若 $f(x,u)$ 可分解为 $f(x,u)=a(x,u)b(x,u)$，① 对 $\forall u\in I$(固定)，$a(x,u)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调且当 $x\to+\infty$ 时，对 $u\in I$ 一致收敛于 0，② 函数 $B(x,u)=\int_a^x b(t,u)\mathrm{d}t$ 在 $[a,+\infty)\times I$ 有界，则 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 I 一致收敛.
	阿贝尔判别法	若 $u_n(x)$ 可分解为 $u_n(x)=\alpha_n(x)\beta_n(x)$，① 对 $\forall x\in I$(固定)，$\{\alpha_n(x)\}$ 单调且在 I 一致有界，② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n(x)$ 在 I 一致收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 一致收敛.	若 $f(x,u)$ 可分解为 $f(x,u)=\alpha(x,u)\beta(x,u)$，① 对 $\forall u\in I$(固定)，$a(x,u)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调且在 $[a,+\infty)\times I$ 有界，② $\int_a^{+\infty}\beta(x,u)\mathrm{d}x$ 在 I 一致收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 I 一致收敛.
常用结论		$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内闭一致收敛但非一致收敛.	$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}sgn\,u,u\in(-\infty,+\infty)$，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{u}},u\in(0,+\infty)$.
			$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛但非一致收敛.

函数项级数的一致收敛性与含参量无穷积分的一致收敛性的概念及判别方法由表 2-2 给出，本节介绍判别函数项级数与含参量无穷积分的一致收敛及非一致收敛的典型例子.

2.2.1 函数项级数一致收敛性

例 2.2.1 求证：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 **证法一**（用一致收敛定义）

先求和函数. 因 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^2}{(1+x^2)^k}=\frac{x^2}{1+x^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-1}{1+x^2}\right)^{k-1}$

$$=\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{-1}{1+x^2}\right)^n}{1+\frac{1}{1+x^2}}$$

$$=\frac{x^2}{2+x^2}\left[1-\left(\frac{-1}{1+x^2}\right)^n\right],$$

故当 $x\neq 0$ 时，$S_n(x)\to\frac{x^2}{2+x^2}(n\to\infty)$，当 $x=0$ 时，$S_n(x)=0$，

于是，$S(x)=\frac{x^2}{2+x^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

对 $\forall n\in N_+$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{x^2}{(2+x^2)(1+x^2)^n}<\frac{x^2}{(1+x^2)^n}\leqslant\frac{x^2}{1+nx^2}<\frac{1}{n},$$

于是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\frac{1}{\varepsilon}\in R^+$，$\forall n>N$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$，

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

证法二（用一致收敛定义）

在证法一中，已有对 $\forall n\in N_+$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{x^2}{(2+x^2)(1+x^2)^n}.$$

$\forall\varepsilon>0$，当 $|x|<\sqrt{\varepsilon}$ 时，有 $\frac{x^2}{(2+x^2)(1+x^2)^n}\leqslant x^2<\varepsilon$，

当 $|x|\geqslant\sqrt{\varepsilon}$ 时，有 $\frac{x^2}{(2+x^2)(1+x^2)^n}\leqslant\frac{1}{(1+x^2)^n}\leqslant\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}$，

令$\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}<\varepsilon$，解得 $n>-\frac{\ln\varepsilon}{\ln(1+\varepsilon)}$，于是，$\forall\varepsilon>0$（限制 $0<\varepsilon<1$），$\exists N=-\frac{\ln\varepsilon}{\ln(1+\varepsilon)}\in R^+$，$\forall n>N$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$，

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

证法三（用 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=0$）

在证法一中，已有对 $\forall n\in N_+$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{n}$，故

$$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|\leqslant\frac{1}{n},\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=0.$$

或者 $|S_n(x)-S(x)|=\frac{x^2}{(2+x^2)(1+x^2)^n}\leqslant\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}=g_n(x)$，

利用微分方法可求得

$$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}g_n(x)=g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

于是
$$\begin{aligned}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|&\leqslant\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}g_n(x)\\&=g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\&=\frac{1}{n}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\to0.\end{aligned}$$

注 用确界方法证明一致收敛或非一致收敛，一般采用放缩法对 $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|$ 进行估计，而避免运用微分方法具体求该确界数列（见本节思考题 1）.

以下证法可以避免具体求和函数及 $|S_n(x)-S(x)|$.

证法四（用 Cauchy 一致收敛准则）

对 $\forall n\in N_+$，$\forall p\in N_+$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，

$$\begin{aligned}|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|&=\left|\frac{(-1)^nx^2}{(1+x^2)^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}x^2}{(1+x^2)^{n+2}}+\cdots+\frac{(-1)^{n+p-1}x^2}{(1+x^2)^{n+p}}\right|\\&=\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\left|1-\frac{1}{1+x^2}+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{(1+x^2)^{p-1}}\right|\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} < \frac{x^2}{(1+x^2)^n} < \frac{1}{n},$$

于是，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = \frac{1}{\varepsilon} \in R^+$，$\forall n > N$，$\forall p \in N_+$，$\forall x \in (-\infty, +\infty)$，有 $|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$，即函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

证法五（利用莱布尼茨判别法及余项估计式）

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n(x)$ 为交错级数，其中 $u_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$. 设其余项 $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^2}{(1+x^2)^k} = R_n(x)$. 对任意固定的实数 x，数列 $\left\{ \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \right\}$ 单调递减趋于 0，由莱布尼茨判别法知，该级数收敛，再由收敛交错级数的余项估计式知，

$$|R_n(x)| \leqslant u_{n+1}(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} < \frac{1}{n} \to 0.$$

证法六（狄利克雷判别法）　令 $a_n(x) = (-1)^{n-1}$，$b_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 的部分和函数列在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致有界，且对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，数列 $\left\{ b_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \right\}$ 是单调的.

又从 $|b_n(x)| = \left| \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \right| = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \leqslant \frac{x^2}{1+nx^2} < \frac{1}{n}$ 可推知，$\left\{ b_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \right\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于 0，由狄利克雷判别法知，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

例 2.2.2　求证：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上非一致收敛.

证明　**证法一**（用一致收敛定义的否定叙述）

先求和函数.

因当 $x \neq 0$ 时，$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = x^2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$.

当 $x = 0$ 时，$S_n(x) = 0$，故 $S(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ 1, x \neq 0 \end{cases}$. 于是

$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{\mathrm{e}}$，$\forall N \in N_+$，$\exists n_0 > N$，$\exists x_0 = \frac{1}{\sqrt{n_0}}$，有

$$|S_{n_0}(x_0) - S(x_0)| = \left(\frac{1}{1+x_0^2}\right)^{n_0} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n_0}\right)^{n_0}} > \varepsilon_0,$$

即函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上非一致收敛.

证法二（用 Cauchy 一致收敛准则的否定叙述）

对 $\forall n \in N_+$，$\forall p \in N_+$，$\forall x \neq 0$，

$$\begin{aligned} & |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \\ = & \left| \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + \cdots + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+p}} \right| \\ = & \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \left| 1 + \frac{1}{1+x^2} + \cdots + \frac{1}{(1+x^2)^{p-1}} \right| \\ = & \frac{1}{(1+x^2)^n} \left| 1 - \frac{1}{(1+x^2)^p} \right| = \frac{(1+x^2)^p - 1}{(1+x^2)^n (1+x^2)^p} \\ \geqslant & \frac{px^2}{(1+x^2)^n (1+x^2)^p}, \end{aligned}$$

于是，$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{\mathrm{e}^2}$，$\forall N \in N_+$，$\exists n_0 > N$，$\exists p_0 = n_0$，$\exists x_0 = \frac{1}{\sqrt{n_0}}$，有

$$\begin{aligned} |u_{n_0+1}(x_0) + u_{n_0+2}(x_0) + \cdots + u_{n_0+p_0}(x_0)| & \geqslant \frac{p_0 x_0^2}{(1+x_0^2)^{n_0} (1+x_0^2)^{p_0}} \\ & = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n_0}\right)^{2n_0}} > \varepsilon_0, \end{aligned}$$

即函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上非一致收敛.

证法三（用确界形式）

利用证法一中所求得的 $S_n(x)$ 和 $S(x)$ 的具体形式，可求得 $\sup\limits_{x \in (-\infty, +\infty)} |S_n(x) -$

$S(x)|=1$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=1\neq 0$，即函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致收敛.

证法四（用连续性）

利用证法一中所求得的 $S(x)$ 的具体形式 $S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x\neq 0\end{cases}$，可见 $S(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不连续，而函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 的通项 $u_n=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，由此函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致收敛.

2.2.2　含参量无穷积分的一致收敛性

在此，我们给出一类含参量无穷积分一致收敛性的题目，这类题目实质上是利用已知收敛的无穷积分来构造含参量无穷积分，并在参量的某个范围内探讨其一致收敛性问题，在命题的证明过程中注意换元积分法的运用. 首先来看下面的两个例子.

例 2.2.3　求证：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ (1) 在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 一致收敛；(2) 在 $(0,+\infty)$ 非一致收敛.

(1) **证法一**（利用 Cauchy 一致收敛准则）

设 $x_1,x_2>0,u\in[\delta,+\infty)$，则 $\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x\overset{t=ux}{=}\int_{x_1u}^{x_2u}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

因 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 收敛，由 Cauchy 收敛准则知，

$$\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall x'_1,x'_2>A，有\left|\int_{x'_1}^{x'_2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

于是，当 $x_1,x_2>\frac{A}{\delta}$ 时，$\forall u\in[\delta,+\infty)(x_iu\geqslant x_i\delta>A,i=1,2)$，就有

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1u}^{x_2u}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|<\varepsilon,$$

故 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 一致收敛.

证法二(利用狄利克雷判别法)

因 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin ux}{x}=u$,故 0 不是瑕点,故只需证$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 在$[\delta,+\infty)(\delta>0)$一致收敛.

被积函数$\dfrac{\sin ux}{x}=\dfrac{1}{x}\sin ux$,令

$$B(x,u)=\int_1^x \sin ut\,\mathrm{d}t,\text{则 }\forall(x,u)\in[1,+\infty)\times[\delta,+\infty),$$

$$|B(x,u)|=\left|\int_1^x \sin ut\,\mathrm{d}t\right|=\left|-\frac{1}{u}\cos ut\,\Big|_1^x\right|=\frac{1}{u}|\cos u-\cos ux|\leqslant\frac{2}{\delta},$$

即 $B(x,u)=\int_1^x \sin ut\,\mathrm{d}t$ 在$[1,+\infty)\times[\delta,+\infty)$有界.

同时,函数$\dfrac{1}{x}$中不含参量 u,在$[1,+\infty)$单调,当 $x\to+\infty$ 时一致收敛于 0,由狄利克雷判别法知,$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 在$[\delta,+\infty)(\delta>0)$一致收敛.

(2) **证法一**(利用 Cauchy 一致收敛准则的否定叙述)

设 $\forall A>0$,任取 $x_0,2x_0>A$ 及 $u_0=\dfrac{1}{x_0}\in(0,+\infty)$,$x_0u_0=1$,有

$$\left|\int_{x_0}^{2x_0}\frac{\sin u_0x}{x}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_0u_0}^{2x_0u_0}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|=\int_1^2\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\varepsilon_0,$$

故$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 在$(0,+\infty)$非一致收敛.

证法二(利用含参量无穷积分的连续性)

只需证$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 在$(0,+\infty)$非一致收敛.

用反证法,假设$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 在$(0,+\infty)$一致收敛,而被积函数$\dfrac{\sin ux}{x}$在$[1,+\infty)\times[0,+\infty)$上连续,故$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 在$[0,+\infty)$一致收敛,进而推得 $\varphi(u)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 在$[0,+\infty)$连续,然而 $\varphi(u)=\begin{cases}0, & u=0\\ \dfrac{\pi}{2}, & u>0\end{cases}$在$[0,+\infty)$不连续,矛盾.

（这里用到的相关结论见下一节关于一致收敛与连续性的阐述）.

例 2.2.4　求证：$\int_0^{+\infty}\sqrt{u}\mathrm{e}^{-ux^2}\mathrm{d}x$(1) 在$[\delta,+\infty)(\delta>0)$一致收敛；(2) 在$(0,+\infty)$非一致收敛.

证明　(1) 设 $x_1,x_2>0,u\in[\delta,+\infty)$，则$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{u}\mathrm{e}^{-ux^2}\mathrm{d}x\overset{t=\sqrt{u}x}{=}\int_{x_1\sqrt{u}}^{x_2\sqrt{u}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

因$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 收敛，由 Cauchy 收敛准则知，

$$\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall x'_1,x'_2>A,\text{有}\left|\int_{x'_1}^{x'_2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

于是，当 $x_1,x_2>\frac{A}{\sqrt{\delta}}$ 时，$\forall u\in[\delta,+\infty)(x_i\sqrt{u}\geqslant x_i\sqrt{\delta}>A,i=1,2)$，就有

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{u}\mathrm{e}^{-ux^2}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1\sqrt{u}}^{x_2\sqrt{u}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right|<\varepsilon,$$

故$\int_0^{+\infty}\sqrt{u}\mathrm{e}^{-ux^2}\mathrm{d}x$ 在$[\delta,+\infty)$一致收敛.

(2) 设 $\forall A>0$，任取 $x_0,2x_0>A$ 及 $u_0=\frac{1}{x_0^2}\in(0,+\infty)$，$x_0\sqrt{u_0}=1$，有

$$\left|\int_{x_0}^{2x_0}\sqrt{u_0}\mathrm{e}^{-u_0x^2}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_0\sqrt{u_0}}^{2x_0\sqrt{u_0}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right|=\left|\int_1^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right|=\varepsilon_0,$$

故$\int_0^{+\infty}\sqrt{u}\mathrm{e}^{-ux^2}\mathrm{d}x$ 在$(0,+\infty)$非一致收敛.

观察例 2.2.3 和例 2.2.4 的证明模式，这两个例子可以抽象成一个命题，从而得到一个较新颖的一致收敛性判别方法，由下面的例 2.2.5 给出.

例 2.2.5　设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$连续且$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$g(u)$ 在$(a,+\infty)$连续且 $g(u)>0,(a\geqslant0)$.

(1) 当 $g(u)$ 在$(a,+\infty)$单调增加时，$\int_0^{+\infty}g(u)f(xg(u))\mathrm{d}x$ 在$[\delta,+\infty)(\delta>a)$一致收敛；

(2) 当$\lim\limits_{u\to a^+}g(u)=0$，$\lim\limits_{u\to+\infty}g(u)=b$($b$ 为正数或$+\infty$) 且 $\exists\alpha,\beta>0$，使得$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\neq0$ 时，$\int_0^{+\infty}g(u)f(xg(u))\mathrm{d}x$ 在$(a,+\infty)$非一致收敛.

证明　(1) 设 $x_1,x_2>0,u\in[\delta,+\infty)$，则

$$\int_{x_1}^{x_2} g(u)f(xg(u))\mathrm{d}x \overset{t=xg(u)}{=} \int_{x_1 g(u)}^{x_2 g(u)} f(t)\mathrm{d}t.$$

因$\int_c^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ 收敛，由 Cauchy 收敛准则知，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x'_1, x'_2 > A, \text{有} \left|\int_{x'_1}^{x'_2} f(t)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

于是，当 $x_1, x_2 > \dfrac{A}{g(\delta)}$ 时，$\forall u \in [\delta, +\infty)(x_i g(u) > A, i = 1,2)$，就有

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} g(u)f(xg(u))\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{x_1 g(u)}^{x_2 g(u)} f(t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon,$$

故$\int_0^{+\infty} g(u)f(xg(u))\mathrm{d}x$ 在$[\delta, +\infty)$ 一致收敛.

(2) 设 $\forall A > 0$，存在 $\alpha x_0, \beta x_0 > A$.

利用已知条件$\lim\limits_{u\to a^+} g(u) = 0$，$\lim\limits_{u\to+\infty} g(u) = b$($b$ 为正数或 $+\infty$) 及 $g(u)$ 在$(a, +\infty)$ 连续，根据介值性定理，当 x_0 充分大时，$\exists u_0 \in (a, +\infty)$，使得 $g(u_0) = \dfrac{1}{x_0}$，从而

$$\left|\int_{\alpha x_0}^{\beta x_0} g(u_0)f(xg(u_0))\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{\alpha x_0 g(u_0)}^{\beta x_0 g(u_0)} f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t\right| = \varepsilon_0,$$

故$\int_0^{+\infty} g(u)f(xg(u))\mathrm{d}x$ 在$(a, +\infty)$ 非一致收敛.

例 2.2.6 求证：$\int_0^{+\infty} \dfrac{x\sin ux}{1+x^2}\mathrm{d}x$(1) 在$[\delta, +\infty)(\delta > 0)$ 一致收敛；(2) 在$(0, +\infty)$ 非一致收敛.

(1) **证法一**(阿贝尔判别法)

被积函数$\dfrac{x\sin ux}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2} \cdot \dfrac{\sin ux}{x}$，其中$\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 在$[\delta, +\infty)$ 一致收敛，而函数$\dfrac{x^2}{1+x^2}$ 中不含参量 u，在$[0, +\infty)$ 单调且$\left|\dfrac{x^2}{1+x^2}\right| < 1$，根据阿贝尔判别法知，$\int_0^{+\infty} \dfrac{x\sin ux}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 在$[\delta, +\infty)$ 一致收敛.

证法二(狄利克雷判别法) 被积函数$\dfrac{x\sin ux}{1+x^2} = \dfrac{x}{1+x^2} \cdot \sin ux$.

对 $\forall (x, u) \in [0, +\infty) \times [\delta, +\infty)$，$\left|\int_0^x \sin ut\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{2}{\delta}$，而函数$\dfrac{x}{1+x^2}$ 中不含

参量 u，在 $[0,+\infty)$ 单调，当 $x\to+\infty$ 时一致收敛于 0，由狄利克雷判别法知，$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $[\delta,+\infty)$ 一致收敛.

(2) **证法一**（阿贝尔判别法）

用反证法，假设 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛，则 $\int_1^{+\infty}\frac{x\sin ux}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 也一致收敛.

又因为 $\frac{\sin ux}{x}=\frac{x\sin ux}{1+x^2}\cdot\frac{1+x^2}{x^2}$，同时函数 $\frac{1+x^2}{x^2}$ 中不含参量 u，在 $[1,+\infty)$ 单调且 $\left|\frac{1+x^2}{x^2}\right|\leqslant 2$，根据阿贝尔判别法知，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛，而已知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 非一致收敛. 矛盾.

证法二（Cauchy 一致收敛准则的否定叙述）

设 $\forall A>0$，任取 $x_0,2x_0>A$ 及 $u_0=\frac{1}{x_0}\in(0,+\infty)$，$x_0u_0=1$，有

$$\left|\int_{x_0}^{2x_0}\frac{x\sin u_0x}{1+x^2}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_0u_0}^{2x_0u_0}\frac{t\sin t}{u_0^2+t^2}\mathrm{d}t\right|\geqslant\left|\int_1^2\frac{t\sin t}{u_0^2+t^2}\mathrm{d}t\right|$$

$$=\int_1^2\frac{t\sin t}{u_0^2+t^2}\mathrm{d}t\geqslant\int_1^2\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\varepsilon_0,$$

故 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 非一致收敛.

思考题 2.2

1. 证明函数列 $\{nx(1-x)^n\}$ 在 $[0,1]$ 非一致收敛.

2. 利用例 2.2.5 之结论证明下列含参量无穷积分的一致收敛性.

(1) $\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x$，(1) 在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 一致收敛；(2) 在 $(0,+\infty)$ 非一致收敛.

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin u^2x}{x}\mathrm{d}x$，(1) 在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 一致收敛；(2) 在 $(0,+\infty)$ 非一致收敛.

(3) $\int_0^{+\infty}u^{-xu}u\ln u\mathrm{d}x$，(1) 在 $[\delta,+\infty)(\delta>1)$ 一致收敛；(2) 在 $(1,+\infty)$ 非一致

收敛.

(4)$\int_0^{+\infty}\dfrac{(u-a)(b-u)\mathrm{d}x}{(b-u)^2+(u-a)^2x^2}\mathrm{d}x$,(1) 在$[\delta,b)(\delta>a)$一致收敛;(2) 在$(a,b)$非一致收敛.

3. 求证:(1)$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^u}\mathrm{d}x$,(1) 在$[\delta,+\infty)(\delta>0)$一致收敛,(2) 在$(0,+\infty)$非一致收敛;

(2)$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin ux}{u(1+x)}\mathrm{d}x$,(1) 在$[\delta,+\infty)(\delta>0)$一致收敛,(2) 在$(0,+\infty)$非一致收敛;

(3)$\int_0^{+\infty}\dfrac{x\sin ux}{u(1+x^2)}\mathrm{d}x$,(1) 在$[\delta,+\infty)(\delta>0)$一致收敛,(2) 在$(0,+\infty)$非一致收敛.

2.3 函数项级数及含参量无穷积分的分析性质

本节列举一些函数项级数及含参量无穷积分的分析性质,大部分的例子要用到 Cauchy 一致收敛准则来加以证明,这可以帮助我们继续了解准则的应用技巧.

2.3.1 连续性

例 2.3.1 若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在开区间$(a,b)$一致收敛,且$\forall n\in N_+$,函数$u_n(x)$在端点$a,b$连续,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在闭区间$[a,b]$一致收敛.

证明 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在开区间$(a,b)$一致收敛,根据 Cauchy 收敛准则就有:

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall n>N,\forall p\in N_+,\forall x\in(a,b)$,有$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|<\varepsilon$.

因为$\forall n\in N_+$,函数$u_n(x)$在端点a,b连续,分别令$x\to a^+,x\to b^-$就有:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(a)\right|\leqslant\varepsilon\text{ 和 }\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(a)\right|\leqslant\varepsilon.$$

于是,$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall n>N,\forall p\in N_+,\forall x\in[a,b]$,有$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|\leqslant\varepsilon$.

即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 一致收敛.

注 1　例 2.3.1 提供了一种判断非一致收敛的方法：

若 $\forall n \in N_+$，函数 $u_n(x)$ 在端点 a，b 连续，且函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在端点 a 或 b 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在开区间 (a,b) 非一致收敛.

例如：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, x \in (1, +\infty)$.

因 $\forall n \in N_+$，函数 $u_n(x)$ 在端点 $x=1$ 处连续，但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 非一致收敛（$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 是内闭一致收敛的）.

注 2　我们熟知的连续性定理：

若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛于和函数 $S(x)$，且 $\forall n \in N_+$，函数 $u_n(x)$ 在区间 I 连续，则和函数 $S(x)$ 在区间 I 连续.

该定理提供了判断非一致收敛的方法：

若 $\forall n \in N_+$，函数 $u_n(x)$ 在区间 I 连续，且函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 的和函数 $S(x)$ 区间 I 不连续，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 非一致收敛（见例 2.2.2 的证法四）.

注 3　对于含参量无穷积分也有相类似的情形（请读者自己试着给出证明）.

(1) 若 $\int_c^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在开区间 (a,b) 一致收敛，且函数 $f(x,u)$ 在 $[c, +\infty) \times [a,b]$ 连续，则 $\int_c^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在闭区间 $[a,b]$ 一致收敛.

(2) 若 $\int_c^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在区间 I 一致收敛于 $J(x)$，且函数 $f(x,u)$ 在 $[c, +\infty) \times I$ 连续，则 $J(x)$ 在区间 I 连续.

据此得到了判断含参量无穷积分非一致收敛的方法：

(1) 若函数 $f(x,u)$ 在 $[c, +\infty) \times I$ 连续，且 $\int_c^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在区间 I 收敛于

$J(x)$，但在 $J(x)$ 区间 I 不连续，则$\int_c^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在区间 I 非一致收敛.

例如：$\int_1^{+\infty} \frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 当 $u \in (0,+\infty)$ 时非一致收敛(见例 2.2.3(2) 的证法二).

(2) 若函数 $f(x,u)$ 在$[c,+\infty)\times[a,b]$ 连续，且 $u=a$ 或 $u=b$ 时$\int_c^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 发散，则$\int_c^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在开区间(a,b) 非一致收敛.

例如：$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^u}$，当 $u \in (1,+\infty)$ 时非一致收敛.

例 2.3.2 设函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$收敛且等度一致连续，则$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛.

证明 因函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$等度一致连续，故

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,y\in[a,b],|x-y|<\delta,\forall n\in N_+$，有 $|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

取$[a,b]$一个分法 $T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_l=b$，使得细度 $\|T\|<\delta$.

因为$\{f_n(x)\}$ 在 $x_i(i=0,1,2,\cdots,l)$ 收敛，根据 Cauchy 收敛准则，

对上述 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall m,n>N,\forall i=0,1,2,\cdots,l$，有 $|f_m(x_i)-f_n(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

又 $\forall x\in[a,b],\exists x_i(0\leqslant i\leqslant l)$，使得$|x-x_i|<\delta$. 于是，

$\forall m,n>N,\forall x\in[a,b]$，有

$$
\begin{aligned}
|f_m(x)-f_n(x)| &= |f_m(x)-f_m(x_i)+f_m(x_i)-f_n(x_i)+f_n(x_i)-f_n(x)| \\
&\leqslant |f_m(x)-f_m(x_i)|+|f_m(x_i)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f_n(x)| \\
&<\varepsilon,
\end{aligned}
$$

根据 Cauchy 一致收敛准则，$\{f_n(x)\}$ 在$[a,b]$一致收敛.

例 2.3.3 若 $\forall n\in N_+$，函数 $f_n(x)$ 在区间 I 一致连续且$\{f_n(x)\}$在区间 I 一致收敛于 $f(x)$，则(1) $f(x)$ 在区间 I 一致连续；(2) $\{f_n(x)\}$ 在 I 等度一致连续.

证明 (1) 由$\{f_n(x)\}$在区间 I 一致收敛于 $f(x)$ 知，

$$\text{对 }\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall x\in I,\text{有 }|f_N(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

由 $f_N(x)$ 在区间 I 一致连续知，

对上述 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I, |x-y| < \delta$，有 $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$，

于是 $\forall x, y \in I, |x-y| < \delta$，有

$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(x)| < \varepsilon$，

故 $f(x)$ 区间 I 一致连续.

(2) 由 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 一致收敛于 $f(x)$ 且 $f(x)$ 在区间 I 一致连续，故

对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, \forall x \in I$，有 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$，

$$\exists \delta_0 > 0, \forall x, y \in I, |x-y| < \delta_0，有 |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

从而 $\forall x, y \in I, |x-y| < \delta_0, \forall n > N$，有

$|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f((y)| + | f(y) - f_n(y)| < \varepsilon$.

而对于 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_N(x)$，它们在区间 I 一致连续，故

$$\exists \delta_i > 0, \forall x, y \in I, |x-y| < \delta_i，有 |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_N\}$，对 $\forall x, y \in I, |x-y| < \delta, \forall n \in N$，有 $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$，故 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 等度一致连续.

2.3.2　可微性、可积性

例 2.3.4　若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $x_0 \in [a,b]$ 收敛，$\forall n \in N_+$，函数 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

证明　因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $x_0 \in [a,b]$ 收敛和 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛，根据 Cauchy 准则就有：

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, \forall p \in N_+$，有 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_0)\right| < \varepsilon$ 和 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u'_n(x)\right| < \varepsilon$ $(\forall x \in [a,b])$.

从而对 $\forall n > N, \forall p \in N_+, \forall x \in [a,b]$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) - u_k(x_0)] + \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_0)\right|$$
$$= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u'_k(\xi_x)(x - x_0) + \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_0)\right|$$
$$\leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u'_k(\xi_x)\right| |x - x_0| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_0)\right|$$
$$\leqslant \varepsilon(b-a) + \varepsilon = (b-a+1)\varepsilon$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$一致收敛.

对于函数列和含参变量无穷积分,也可以作上述考虑,下面将例 2.3.4 分别改写为函数列和含参变量无穷积分的形式,即下面的例 2.3.5 和例 2.3.6.

例 2.3.5 若函数列$\{f_n(x)\}$在$x_0 \in [a,b]$收敛,$\forall n \in N_+$,函数$f_n(x)$在$[a,b]$可导,且$\{f'_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛,则$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛.

其证明关键在于

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)|$$
$$= |f_{n+p}(x) - f_n(x) - [f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)] + [f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)]|$$
$$\leqslant |f_{n+p}(x) - f_n(x) - [f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)]| + |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)|$$
$$= |f'_{n+p}(\xi_x) - f'_n(\xi_x)| + |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)|.$$

例 2.3.6 若含参变量无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在$u_0 \in [\alpha,\beta]$收敛,$f(x,u)$在区域$[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$存在偏导数$f'_u(x,u)$,且$\int_a^{+\infty} f'_u(x,u)\mathrm{d}x$在$[\alpha,\beta]$一致收敛,则$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在$[\alpha,\beta]$一致收敛.

其证明关键在于

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{A_1}^{A_2} [f(x,u) - f(x,u_0) + f(x,u_0)]\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant \left|\int_{A_1}^{A_2} [f(x,u) - f(x,u_0)]\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u_0)\mathrm{d}x\right|$$
$$= \left|\int_{A_1}^{A_2} f'_u(x,\xi_u)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u_0)\mathrm{d}x\right|.$$

如果例 2.3.5 的条件加强为"$\forall n \in N_+$,函数$f_n(x)$在$[a,b]$具有连续的导数",则有下面的例 2.3.7.

例 2.3.7　若函数列$\{f_n(x)\}$在$x_0 \in [a,b]$收敛，$\forall n \in N_+$，函数$f_n(x)$在$[a,b]$具有连续的导数，且$\{f'_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛，则$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛.

证明　先证函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$收敛.

设$\{f'_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛于$g(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = A$，因

$$\forall x \in [a,b], f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(x)\mathrm{d}x，令 n \to \infty，$$

根据逐项积分定理，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f'_n(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f'_n(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} g(x)\mathrm{d}x，$$

于是，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = A + \int_{x_0}^{x} g(x)\mathrm{d}x$，即$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$收敛.

记$f(x) = A + \int_{x_0}^{x} g(x)\mathrm{d}x$，则$f(x_0) = A$，$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(x)\mathrm{d}x$

（显然$f'(x) = g(x)$，即$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$，这就是逐项微分定理）.

再证$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛于$f(x)$.

因$\{f'_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛于$g(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$，故

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, \forall p \in N_+, \forall x \in [a,b]$，有$|f'_n(x) - g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$，同时有$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$，

进而，注意到$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(x)\mathrm{d}x$，对$\forall x \in [a,b]$，

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(x)\mathrm{d}x - f(x_0) - \int_{x_0}^{x} g(x)\mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant |f_n(x_0) - f(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} |f'_n(x) - g(x)|\mathrm{d}x \right|. \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b |f'_n(x) - g(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

即$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛于$f(x)$.

例 2.3.8　若函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛于极限函数$f(x)$且$\forall n \in N_+$，$f_n(x)$在$[a,b]$可积，则$f(x)$在$[a,b]$可积.

证明 函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛于极限函数$f(x)$，故

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall x \in [a,b], 有 |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

因$f_N(x)$在$[a,b]$可积，故

$$对上述\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall T: \|T\| < \delta, 有 \sum_{k=1}^{n} \omega_k^{f_N} \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{3}.$$

对$\forall x,y \in [x_{k-1},x_k]$，有

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f_N(x)| + |f_N(x)-f_N(y)| + |f_N(y)-f(y)|,$$

进而
$$\begin{aligned}
\omega_k^f &= \sup_{\forall x,y\in[x_{k-1},x_k]} \{|f(x)-f(y)|\} \\
&\leqslant \sup_{\forall x,y\in[x_{k-1},x_k]} \{|f(x)-f_N(x)|\} + \sup_{\forall x,y\in[x_{k-1},x_k]} \{|f_N(x)-f_N(y)|\} \\
&\quad + \sup_{\forall x,y\in[x_{k-1},x_k]} \{|f_N(y)-f(y)|\} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{3(b-a)} + \omega_k^{f_N} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)},
\end{aligned}$$

于是$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall T: \|T\| < \delta$，有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \omega_k^f \Delta x_k &\leqslant \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} \omega_k^{f_N} \Delta x_k + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

即$f(x)$在$[a,b]$可积.

思考题 2.3

1. 若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$x_0 \in [a,b]$收敛，$\forall n \in N_+$，函数$u_n(x)$在$[a,b]$满足条件：$\exists M_n > 0, \forall x,y \in [a,b]$，有$|u_n(x)-u_n(y)| \leqslant M_n |x-y|$，且$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$一致收敛.

2. 若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$收敛，$\forall n \in N_+$，函数$u_n(x)$在$[a,b]$可导，且$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$的部分和函数列$\{B_n(x)\}$在$[a,b]$一致有界，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$一

致收敛.

3. 若函数列$\{u_n(x)\}$在区间I一致收敛,且$\forall n \in N_+$,函数$u_n(x)$在区间I有界,则函数列$\{u_n(x)\}$在区间I一致有界.

4. 若连续函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛于$f(x)$,且$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续,则$\{g[f_n(x)]\}$在$[a,b]$一致收敛于$g[f(x)]$.

5. 若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$满足下列条件:

(1) 函数列$\{u_n(x)\}$在区间I一致收敛,且$\forall n \in N_+$,$u_n(x)$在区间I有界;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$在区间$I$一致收敛,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |v_n(x)|$的部分和函数列在区间$I$一致有界,

则函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$在区间$I$一致收敛.

2.4　幂级数

幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$必在$x=0$处收敛,其通项形式决定了其收敛的特殊性.

关于幂级数的主要结论有:

(1) 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R, 0 \leqslant R \leqslant +\infty$,则$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$总是在$(-R,R)$之内(绝对)收敛,且$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛域$I$为下列区间之一:

$$R = 0 \text{ 时}, I = \{0\}; R = +\infty \text{ 时 } I = (-\infty, +\infty);$$

$$0 < R < +\infty \text{ 时}, I = (-R,R), [-R,R), (-R,R], [-R,R].$$

其中R被称为收敛半径,$(-R,R)$被称为收敛区间(与收敛域的区别仅可能在端点处!). 也可以这样求R:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R$.

(2) 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,收敛半径$R>0$,则$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在其收敛域内闭一致收敛.

注意,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在其收敛域未必是内闭绝对收敛的,但在收敛区间内闭绝对收

敛. 例如$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$,其收敛半径为$R=1$,收敛域为$[-1,1)$,在$x=-1$处条件收敛,这时必须说它在$(-1,1)$内闭绝对收敛.

(3) 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,收敛半径$R>0$,则

① 和函数$f(x)$在其收敛域上是连续的;

② 对任意$x\in(-R,R)$,有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nx^{n+1}}{n+1};$$

③ 对任意$x\in(-R,R)$,有$f'(x)=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$.

2.4.1 幂级数收敛半径及收敛域

例 2.4.1 求下列级数的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\dfrac{1}{3n}\right)(x^2+x+1)^n$;(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\dfrac{1}{2x}\right)^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1^n+2^n+\cdots+K^n}{n^2}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$;(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{n^2}x^{n^3}$;(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n^2}}{2^n}$.

解 (1) 令$t=x^2+x+1$,收敛域为$(-1,0)$;

(2) 令$t=\dfrac{1}{2x}$,收敛域为$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$;

(3) 令$t=\dfrac{1-x}{1+x}$,收敛域为$\left[\dfrac{K-1}{K+1},\dfrac{K+1}{K-1}\right]$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^{n^2}x^{n^3}|}=\begin{cases}+\infty, & |x|\geqslant 1\\ 0, & |x|<1\end{cases}$,收敛域为$(-1,1)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|x^{n^2}|}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^n}{2^n}\begin{cases}0, & |x|<1\\ \dfrac{1}{2}, & |x|=1\\ +\infty, & |x|>1\end{cases}$,收敛域为$[-1,1]$.

在幂级数中,逐项积分、逐项微分有收敛半径不变的性质,这个性质的证明实质上是收敛性的判别问题.

例 2.4.2 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$与逐项微分后的幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$具有相同的收敛半径.

证明　设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径分别是 R_1, R_2.

首先,幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛点都是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛点,即 $R_2 \leqslant R_1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0}{n} n a_n x_0^{n-1},$$

注意到数列 $\left\{\frac{x_0}{n}\right\}$ 是单调有界的,因此当 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x_0^{n-1}$ 收敛时,由阿贝尔判别法知,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛.

其次,$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在 $(-R_1, R_1)$ 上是(绝对)收敛的,即 $R_1 \leqslant R_2$.

设 $\forall x_0 \in (-R_1, R_1)$,则存在 $\bar{x} \in (-R_1, R_1)$,使得 $|x_0| < |\bar{x}| < R_1$,因为 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x_0}\left(\frac{x_0}{\bar{x}}\right)^n = 0$,从而

$$\exists M > 0, \forall n \in N_+, \text{有} \left|\frac{n}{x_0}\left(\frac{x_0}{\bar{x}}\right)^n\right| \leqslant M,$$

于是
$$|n a_n x_0^{n-1}| = \left|\frac{n}{x_0}\left(\frac{x_0}{\bar{x}}\right)^n\right| |a_n \bar{x}^n| \leqslant M |a_n \bar{x}^n|,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \bar{x}^n|$ 是收敛的($\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R_1, R_1)$ 上是绝对收敛的),由比较判别法知,$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在 x_0 绝对收敛,进而在 $(-R_1, R_1)$ 上是绝对收敛的.

注　从证明过程获知,当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 逐项微分后获得新幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 时,新幂级数照比原幂级数的收敛点可能会出现丢失现象,且只会丢失端点. 例如,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 的收敛域为 $[-1,1]$,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$,$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n}$ 的收敛域为 $(-1,1)$.

2.4.2　幂级数求和

下面我们利用级数的运算性质和上述分析性质,研究幂级数求和问题.

例 2.4.3 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数，其中 $\{a_n\}$ 为等差数列，首项 $a_0 \neq 0$，公差为 $d > 0$.

解 因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，首项 $a_0 \neq 0$，公差为 d，所以 $a_n = a_0 + nd\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$. 又公差 $d > 0$，故不妨假设 $\{a_n\}$ 为正数列.

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0 + (n+1)d}{a_0 + nd} = 1$ 推知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R = 1$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 推知，当 $x = \pm 1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散，于是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$.

以下用四种方法求其和函数.

方法一（错位相减法）

注意到 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{x^n\}$ 为等比数列，考虑到初等数学中等比数列求和公式的推导方法，采用错位相减法.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

$$xS(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n,$$

$$\begin{aligned} S(x) - xS(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n \\ &= a_0 + d\sum_{n=1}^{\infty} x^n = a_0 + \frac{dx}{1-x}, \end{aligned}$$

于是，$S(x) = \dfrac{a_0}{1-x} + \dfrac{dx}{(1-x)^2}, x \in (-1, 1)$.

方法二（逐项微积法）

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + nd) x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^n + d\sum_{n=0}^{\infty} n x^n \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^n + d \cdot x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \\ &= \frac{a_0}{1-x} + d \cdot x \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n t^{n-1} \mathrm{d}t\right)' \\ &= \frac{a_0}{1-x} + d \cdot x \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)' \end{aligned}$$

$$=\frac{a_0}{1-x}+\frac{dx}{(1-x)^2}.$$

方法三(Cauchy 乘积法)

根据幂级数性质(收敛区间内绝对收敛)和 Cauchy 乘积定理知,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{(1-x)^2},x\in(-1,1),$$

故
$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}=\frac{x}{(1-x)^2},$$

于是,
$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+nd)x^n$$
$$=a_0\sum_{n=0}^{\infty}x^n+d\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\frac{a_0}{1-x}+\frac{dx}{(1-x)^2}.$$

对于一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 来说,其和函数实质上是由系数数列 $\{a_n\}$ 确定的,发挥 $\{a_n\}$ 的作用,由此产生了纯粹通过研究 $\{a_n\}$ 的递推关系来求得和函数的方法 —— 发生函数法.

对于一个给定的数列 $\{a_n\}$,如果函数 $S(x)$ 关于原点的幂级数展开式中 x^n 的系数恰为 a_n,就称 $S(x)$ 为数列 $\{a_n\}$ 的发生函数.

方法四(发生函数法)

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列,首项 $a_0\neq 0$,公差为 $d>0$,故 $a_{n+1}=a_n+d$,两边同乘 x^n 得 $a_{n+1}x^n=a_nx^n+dx^n$,两边求和

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+d\sum_{n=0}^{\infty}x^n,$$

注意到 $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^n=a_1+a_2x+\cdots+a_{n+1}x^n+\cdots=\frac{S(x)-a_0}{x}(x\neq 0)$, $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$,于是 $\frac{S(x)-a_0}{x}=S(x)+\frac{d}{1-x}$,解得 $S(x)=\frac{a_0}{1-x}+\frac{dx}{(1-x)^2}$.

从方法四的证明过程可以看出,发生函数法是一种通过系数数列 $\{a_n\}$ 的递推关系寻求关于 $S(x)$ 的代数方程(或微分方程)的方法,这也是对方法一的升华.

例 2.4.4　利用发生函数法求下列幂级数的和函数:

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty} nx^n;\qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n.$$

解 (1) 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$，收敛域为$(-1,1)$.

$$a_n=n,a_{n+1}=a_n+1,a_1=1,a_{n+1}x^n=a_nx^n+(2n+1)x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty} x^n,$$

注意到
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}x^n=\frac{S(x)-x}{x},\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x},$$

就有$\dfrac{S(x)-x}{x}=S(x)+\dfrac{x}{1-x}$，解得 $S(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$，$x\in(-1,1)$.

(2) 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n$，收敛域为$(-1,1)$.

$$a_n=n^2,a_{n+1}=a_n+2n+1,a_1=1,a_{n+1}x^n=a_nx^n+(2n+1)x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n,\text{注意到}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}x^n=\frac{S(x)-x}{x},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n=2\sum_{n=1}^{\infty} nx^n+\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{x}{1-x}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^2},$$

就有$\dfrac{S(x)-x}{x}=S(x)+\dfrac{3x-x^2}{(1-x)^2}$，解得 $S(x)=\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1)$.

例 2.4.5 设 $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$，求和函数 $f(x)$.

解 第一步 证明 $f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$.

设 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$，$n=0$ 时，$I_0=\dfrac{\pi}{2}$. 当 $n\geqslant 1$ 时，由分部积分法得：

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}t\,\mathrm{d}(-\cos t)\\&=-\sin^{2n-1}t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}t\cos^2t\,\mathrm{d}t\\&=(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}t(1-\sin^2t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= (2n-1)I_{n-1} - (2n-1)I_n$$

得到递推公式

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} \tag{2.4.1}$$

进而 $I_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$,因此,

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \tag{2.4.2}$$

第二步　求幂级数(2.4.2)的收敛域.

幂级数(2.4.2)的收敛域由

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \tag{2.4.3}$$

来确定. 为此,记 $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. 由于

$$1 > a_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n-2} \times \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$,从而幂级数(2.4.3)的收敛半径为 $R = 1$. 同时利用上面不等式的右端,根据比较判别法知,当 $x = 1$ 时幂级数(2.4.3)发散.

当 $x = -1$ 时,幂级数(2.4.3)化为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. 由

$$a_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n} > \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n} \times \frac{2n+1}{2n+2} = a_{n+1},$$

推知 $\{a_n\}$ 递减;由

$$a_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)a_n}$$

推知 $0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,进而 $a_n \to 0 (n \to \infty)$,最后由莱布尼兹判别法知,交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 收敛.

综上,幂级数(1)的收敛域为 $[-1,1)$.

第三步　求和函数 $f(x)$.

我们先利用本节介绍的发生函数法在 $(-1,1)$ 上求 $f(x)$.

因为 $a_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!},n=1,2,\cdots,$

故 $a_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n+2}a_n,n=1,2,\cdots$,其中 $a_1=\dfrac{1}{2}$.

进一步就有 $$(2n+2)a_{n+1}=(2n+1)a_n,$$

$$2(n+1)a_{n+1}x^n=2na_nx^n+a_nx^n,$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n,x\in(-1,1) \tag{2.4.4}$$

根据幂级数(2.4.3)的形式知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n=g(x)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=xg'(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-a_1=g'(x)-\frac{1}{2},$$

代入到式(2.4.4)中,就有 $2g'(x)-1=2xg'(x)+g(x)$.

因有 $g(x)=f(x)-1,g'(x)=f'(x)$,于是

$$2f'(x)=2xf'(x)+f(x)\text{ 或}(1-x)f'(x)=\frac{1}{2}f(x),$$

用变量分离法解微分方程 $(1-x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2}y,\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{2(1-x)}$,注意到 $y(0)=f(0)=1$,求得 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}},x\in(-1,1)$.

又因为 $f(x)$ 在 $[-1,1)$ 上连续,而 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 也恰在 $[-1,1)$ 上连续,

最终求得和函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}},x\in[-1,1)$.

例 2.4.6 求下列数项级数的和:

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n};\qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}.$$

解 (1) 此例的初等解法见例 2.1.1. 注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$,

问题转化为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$ 求和问题. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x},\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=\dfrac{x}{(1-x)^2}$,

故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n = 2\sum_{n=1}^{\infty}nx^n - \sum_{n=1}^{\infty}x^n = \frac{2x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x}, x \in (-1,1).$

将 $x=\frac{1}{3}$ 代入计算得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}=1.$

(2) 注意到 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}1^{3n-1}$，问题转化为幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}x^{3n-1}$ 求和问题.

$f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}x^{3n-1}$ 的收敛域为$(-1,1]$，且在$(-1,1]$ 连续.

注意到 $f(0)=0$，就有

$$f(x)=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}t^{3n-1}\right)'\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{3n-2}\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{t}{1+t^3}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{3}\ln(1+x)+\frac{1}{6}\ln(1-x+x^2)+\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}, \forall x\in(-1,1).$$

此函数在$(-1,1]$ 是连续的，

故 $f(x)=-\frac{1}{3}\ln(1+x)+\frac{1}{6}\ln(1-x+x^2)+\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$，$x\in(-1,1]$，从而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}=f(1)=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi-\frac{1}{3}\ln 2.$

2.4.3　函数幂级数展开

函数幂级数展开是幂级数求和的反问题，涉及到函数幂级数展开有如下两个结论.

定理 2.4.1　设 $f(x)$ 在(x_0-r,x_0+r) 具有任意阶导数，且 $\forall x\in(x_0-r,x_0+r)$，Taylor 公式的余项 $R_n(x)\to 0(n\to\infty)$，则 $\forall x\in(x_0-r,x_0+r)$，$f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$

推论　设 $f(x)$ 在(x_0-r,x_0+r) 具有任意阶导数，且 $\forall x\in(x_0-r,x_0+r)$，$\exists M>0$，$\forall n\in N_+$，有 $|f^{(n)}(x)|\leqslant M$，则 $\forall x\in(x_0-r,x_0+r)$，$f(x)=$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

(这里的条件“$\forall x\in(x_0-r,x_0+r)$，$\exists M>0$，$\forall n\in N_+$，有$|f^{(n)}(x)|\leqslant M$”，指的是对 $\forall x\in(x_0-r,x_0+r)$，数列$\{f^{(n)}(x)\}$有界).

由上述结论我们可以得到 5 个重要函数的幂级数展开：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad -\infty<x<+\infty.$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad -\infty<x<+\infty.$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\quad -\infty<x<+\infty.$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\quad -1<x\leqslant 1.$$

$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$，收敛半径 $R=1$，± 1 处视 α 情况来定.

例 2.4.7 证明$\int_0^{2\pi}e^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta)\,d\theta=2\pi$，$\forall t\in(-\infty,+\infty)$.

证明 令 $f(t)=\int_0^{2\pi}e^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta)\,d\theta$.

当 $t=0$ 时，$f(0)=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$，故只需证 $\forall t\in(-\infty,+\infty)$，$f'(t)\equiv 0$.

$$\begin{aligned}f'(t)&=\left(\int_0^{2\pi}e^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta)\,d\theta\right)'=\int_0^{2\pi}(e^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta))'\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}[e^{t\cos\theta}\cos\theta\cos(t\sin\theta)-e^{t\cos\theta}\sin\theta\sin(t\sin\theta)]\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}e^{t\cos\theta}\cos(\theta+t\sin\theta)\,d\theta,\end{aligned}$$

用数学归纳法可证得 $f^{(n)}(t)=\int_0^{2\pi}e^{t\cos\theta}\cos(n\theta+t\sin\theta)\,d\theta$，

从而 $\forall t\in(-\infty,+\infty)$，$|f^{(n)}(t)|=\left|\int_0^{2\pi}e^{t\cos\theta}\cos(n\theta+t\sin\theta)\,d\theta\right|$

$$\leqslant\int_0^{2\pi}|e^{t\cos\theta}\cos(n\theta+t\sin\theta)|\,d\theta$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} e^t d\theta = 2\pi e^t,$$

由定理 2.4.1 之推论知，$\forall t \in (-\infty, +\infty)$，$f'(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n!} t^n$，

又 $\forall n \in N_+$，$f^{(n)}(0) = \int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta = 0$，故 $f'(t) \equiv 0$.

思考题 2.4

1. 利用发生函数法求下列幂级数的和函数：

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}; \qquad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (1 + 2^2 + \cdots + n^2) x^n.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 具有任意阶导数，且 $\exists M > 0$，$\forall x \in (-\infty, +\infty)$，$\forall n \in N_+$，有 $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$，又 $\forall n \in N_+$，有 $f(\frac{1}{n}) = 0$，则 $f(x) \equiv 0$，$\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

第3章　函数的可微性

本章内容分为四节介绍，第一节微分中值定理，列举了应用Rolle(罗尔)定理、Lagrange(拉格朗日)中值定理、Cauchy中值定理和Taylor公式的一些例子；第二节概括了与导数有关的极限问题；第三节利用导数研究了函数的单调性、凸性和次加性；最后一节研究多元函数的微分问题.

3.1　微分中值定理

3.1.1　微分中值定理的基本内容

(Fermat(费马)定理)　若 $f(x)$ 在 x_0 可导且取得极值，则 $f'(x_0)=0$.

(Darboux(达布)定理)　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，则

$$\exists\xi\in(a,b),使得\ f'(\xi)=0.$$

(Rolle定理)　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f(a)=f(b)$，则

$$\exists\xi\in(a,b),使得\ f'(\xi)=0.$$

(Lagrange中值定理)　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则

$$\exists\xi\in(a,b),使得\ f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(Cauchy中值定理)　若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq0$，则

$$\exists\xi\in(a,b),使得\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

(带Peano(皮亚诺)余项的Taylor公式)　若 $f^{(n)}(x_0)$ 存在，则

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

(带Lagrange余项的Taylor公式)　若 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上存在 $n+1$ 阶导数，

则

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

先来谈谈 Fermat 定理. Fermat 定理告诉我们，对于可导函数而言，极值点都是稳定点(导数为零的点)，因此找到可导函数存在极值点 ξ，也就证得 $f'(\xi)=0$.

再从最值与极值的关系考虑，只要最值取在区间内部，就成为极值，对应的自变量就是极值点. 那么首先要保证最值的存在性，最直接的办法就是使 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续. 那么接下来，如何使最值取在区间内部呢?

Rolle 定理的办法是让 $f(a)=f(b)$，这样如果 $f(x)$ 不是 $[a,b]$ 上的常值函数，则 $\exists c\in(a,b)$，使得 $f(c)\neq f(a)=f(b)$，这样最大值和最小值就至少有一个取在区间内部.

这样的想法在下面 Darboux 定理的证法一中体现的很明显.

例 3.1.1(Darboux 定理)　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证法一　不妨设 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)<0$，则由 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$ 及极限保号性知，$\exists x_1>a$(充分接近 a)，使得 $\dfrac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0$，从而 $f(x_1)>f(a)$.

同理 $\exists x_2<b$(充分接近 b)，使得 $f(x_2)>f(b)$.
由此推知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值必在 (a,b) 之内，结合 Fermat 定理就有

$$\exists\xi\in(a,b)，使得 f'(\xi)=0.$$

接下来给出的 Darboux 定理的另一简洁证明，则是通过巧妙地构造函数，利用零点定理、Rolle 定理来推导 Darboux 定理. 零点定理、Rolle 定理与 Darboux 定理是解决函数零点存在问题的三大工具!

证法二　当 $f(b)=f(a)$ 时，根据 Rolle 定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

当 $f(b)\neq f(a)$ 时，由 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，故不妨设 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot f'_+(a)<0$.

$$令\ H(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\leqslant b\\ f'_+(a), & x=a\end{cases},$$

则 $H(x)$ 在$[a,b]$连续，且 $H(a)H(b)<0$，根据零点定理知，$\exists x_0\in(a,b)$，使得 $H(x_0)=0$，这推得 $f(x_0)=f(a)$，再根据Rolle定理，$\exists\xi\in(a,x_0)$，使得 $f'(\xi)=0$.

Darboux 定理又称作导数介值性定理，其等价陈述是：

若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导，且 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$，η 介于 $f'_+(a)$，$f'_-(b)$ 之间，则

$$\exists\xi\in(a,b)，使得\ f'(\xi)=\eta.$$

3.1.2 Rolle 定理

在中值定理中，Rolle 定理是最基础的，Rolle 定理的应用思想就是函数构造思想.

用 Rolle 定理推导 Lagrange 中值定理的办法是将 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 变形为 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$，从而构造函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x,x\in[a,b],$$

验证其满足Rolle定理条件. 其中直线 $y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ 平行于曲线段 $y=f(x)$，$x\in[a,b]$ 的端点连线 $y=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. 当然，如果构造函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),x\in[a,b],$$

将给验证 $F(a)=F(b)$ 带来方便.

用 Rolle 定理推导 Cauchy 中值定理的办法是将$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 变形为

$$f'(\xi)[g(b)-g(a)]-g'(\xi)[f(b)-f(a)]=0,$$

从而构造函数

$$F(x)=f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)],x\in[a,b].$$

下面的例 3.1.2 称为广义 Rolle 定理，我们给出多种证法，需要注意区间构造

与函数构造的思想方法.

例 3.1.2　设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 可导，$f(a+0)=f(b-0)$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.（注意这里 (a,b) 可以是有限区间，也可以是无限区间，当 $a=-\infty$ 或 $b=+\infty$ 时，$f(a+0)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，$f(b-0)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$）

证法一　记 $A=f(a+0)=f(b-0)$. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内恒为常数，则结论显然成立.

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内不恒为常数，则 $\exists c\in(a,b)$，使得 $f(c)\neq A$，不妨设 $f(c)>A$. 因 $A=f(a+0)=f(b-0)$，则，$\exists c_1\in(a,c)$，$c_2\in(c,b)$，使得

$$f(c_1)<f(c),f(c_2)<f(c).$$

又 $f(x)$ 必在 $[c_1,c_2]$ 取得最大值 $f(\xi)$，此最大值一定在区间 $[c_1,c_2]$ 内部取得，应用 Fermat 定理得，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证法二　仍记 $A=f(a+0)=f(b-0)$.

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内不恒为常数，则 $\exists c\in(a,b)$，使得 $f(c)\neq A$，不妨设 $f(c)>A$. 现取定 η：$A<\eta<f(c)$，因 $A=f(a+0)=f(b-0)$，由极限保号性知，

$$\exists c_1\in(a,c),c_2\in(c,b),\text{使得 } f(c_1)<\eta<f(c),f(c_2)<\eta<f(c),$$

再由介值性定理知，

$$\exists\xi_1\in(c_1,c),\xi_2\in(c,c_2),\text{使得 } f(\xi_1)=f(\xi_2)=\eta.$$

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对 $f(x)$ 应用 Rolle 定理得，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证法三　作以下两种情形的讨论.

(1) 当 (a,b) 为有限区间时，构造函数 $F(x)=\begin{cases}f(a+0), & x=a\\ f(x), & x\in(a,b)\\ f(b-0), & x=b\end{cases}$，对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 应用 Rolle 定理可得结论.

(2) 当 (a,b) 为无限区间时，以 $a=$ 有限数，$b=+\infty$ 为例.

令 $x=\tan t$，当 $t\in(\arctan a,\frac{\pi}{2})$，恰有 $x\in(a,+\infty)$，并且

$$x\to a^+\Leftrightarrow t\to\arctan a^+,x\to+\infty\Leftrightarrow t\to\frac{\pi}{2}^-.$$

再令 $G(t)=f(\tan t)$，$t\in(\arctan a,\frac{\pi}{2})$，则

$$\lim_{t\to\arctan a^+} G(t) = f(a+0) = f(b-0) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} G(t).$$

由情形(1)知，$\exists t_0 \in (\arctan a, \frac{\pi}{2})$，使得 $G'(t_0)=0$，即 $f'(\tan t_0)\sec^2 t_0 = 0$，而 $\sec^2 t_0 \neq 0$，从而 $f'(\tan t_0)=0$，记 $\xi = \tan t_0 \in (a,+\infty)$，则 $f'(\xi)=0$.

证法四(反证法)　假设 $\forall x \in (a,b)$，有 $f'(x)\neq 0$. 由 Darboux 定理知，$f'(x)$ 在 (a,b) 不变号. 不妨设 $\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格递增，这导致 $f(a+0)<f(b-0)$，矛盾.

例 3.1.3　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：

(1) $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$；

(2) $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi)+\xi f(\xi)=0$.

证明　(1) 构造函数 $F(x)=xf(x)$，$x\in[a,b]$，满足 Rolle 定理条件.

(2) 构造函数 $F(x)=e^{\frac{x^2}{2}}f(x)$，$x\in[a,b]$，满足 Rolle 定理条件.

例 3.1.4　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$F(x)=(x-b)f(x)$，证明：$\exists \xi\in(a,b)$，使得 $F''(\xi)=0$.

证明　因 $F(x)=(x-b)f(x)$ 及 $f(a)=f(b)=0$，故 $F(a)=F(b)=0$.

由 Rolle 定理知，$\exists \xi_1 \in (a,b)$，使得 $F'(\xi_1)=0$. 又 $F'(x)=f(x)+(x-b)f'(x)$，故 $F'(b)=0$，进而 $F'(x)$ 在 $[\xi_1,b]$ 上满足 Rolle 定理条件. 于是，$\exists \xi \in (\xi_1,b)\subset(a,b)$，使得 $F''(\xi)=0$.

下面的例 3.1.5 中使用了待定系数法，实际上待定系数法也是解决中值问题的技巧方法之一，后面的例 3.1.11 中的证法二也是此法.

例 3.1.5　设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $g''(x)\neq 0$，$x\in(a,b)$，则

$$\exists \xi \in (a,b)，使得 \frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

证明(待定系数法)

由 $g''(x)\neq 0$ 可推知 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调，从而 $g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)\neq 0$.

设实数 k 满足等式 $\dfrac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}=k$，往证 $k=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

为此构造函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)-k[g(x)-g(a)-(x-a)g'(a)].$$

则 $F(a)=F(b)=0$，根据 Rolle 定理知，$\exists\,\xi_0\in(a,b)$，使得 $F'(\xi_0)=0$.

而 $F'(x)=f'(x)-f'(a)-k[g'(x)-g'(a)]$，还有 $F'(a)=0$，再由 Rolle 定理知，$\exists\,\xi\in(a,b)$，使得 $F''(\xi)=0$. 而 $F''(x)=f''(x)-kg''(x)$，从而 $k=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

3.1.3 Lagrange 中值定理

例 3.1.6　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，且 $\exists\,x_0\in(a,b)$，使点 $(x_0,f(x_0))$，$(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 三点不共线（$f(x)$ 非线性），证明：

$$\exists\,\xi\in(a,b)\text{，使}\,|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

证法一　构造函数 $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，$x\in[a,b]$，则

$$F(a)=F(b)=0,\ F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

因为 $(x_0,f(x_0))$、$(a,f(a))$、$(b,f(b))$ 不共线，

所以 $\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}\neq\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，进而 $F(x_0)\neq0$，不妨设 $F(x_0)>0$.

当 $f(b)>f(a)$ 时，对 $F(x)$ 在 $[a,x_0]$ 上应用 Lagrange 中值定理，

$\exists\,\xi\in(a,x_0)$，使得 $F'(\xi)=\dfrac{F(x_0)-F(a)}{x_0-a}=\dfrac{F(x_0)}{x_0-a}>0$，即

$$f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0.$$

当 $f(b)\leqslant f(a)$ 时，对 $F(x)$ 在 $[x_0,b]$ 上应用 Lagrange 中值定理，

$\exists\,\xi\in(x_0,b)$，使得 $F'(\xi)=\dfrac{F(b)-F(x_0)}{b-x_0}=\dfrac{-F(x_0)}{b-x_0}<0$，即

$$f'(\xi)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant0.$$

综上，$\exists\,\xi\in(a,b)$，使 $|f'(\xi)|>\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$.

证法二 设 $k_{ab}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,$k_{ax_0}=\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}$,$k_{x_0b}=\dfrac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$,

$$f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a)=f(b)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-b)=c.$$

因$(x_0,f(x_0))$、$(a,f(a))$、$(b,f(b))$不共线,故 $f(x_0)\neq c$.

当$f(x_0)>c$时,可得$k_{x_0b}<k_{ab}<k_{ax_0}$,当$f(x_0)<c$时,可得$k_{ax_0}<k_{ab}<k_{x_0b}$,从而$|k_{ab}|<\max\{|k_{x_0b}|,|k_{ax_0}|\}$,根据 Lagrange 中值定理知,$k_{ax_0}=f'(\xi_1)$,$k_{x_0b}=f'(\xi_2)$,其中$\xi_1\in(a,x_0)$,$\xi_2\in(x_0,b)$,从而$|k_{ab}|<\max\{|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|\}$,进而 $\exists\xi\in(a,b)$,使$|f'(\xi)|>|k_{ab}|$,其中ξ取$|f'(\xi_1)|$,$|f'(\xi_2)|$较大者所对应之ξ_1或ξ_2.

证法三(反证法) 假设 $\forall x\in(a,b)$,都有$|f'(x)|\leqslant\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$,$k_{ax_0}$,$k_{ab}$,$k_{x_0b}$同证法二.

一方面,$k_{ax_0}=f'(\xi_1)$,$k_{x_0b}=f'(\xi_2)$,其中$\xi_1\in(a,x_0)$,$\xi_2\in(x_0,b)$,

由假设知$|k_{ax_0}|\leqslant|k_{ab}|$,$|k_{x_0b}|\leqslant|k_{ab}|$,进而有

$$\frac{x_0-a}{b-a}\sqrt{1+k_{ax_0}^2}+\frac{b-x_0}{b-a}\sqrt{1+k_{x_0b}^2}\leqslant\sqrt{1+k_{ab}^2}.$$

另一方面,由于点$(x_0,f(x_0))$、$(a,f(a))$、$(b,f(b))$不共线,则

$$\sqrt{(b-a)^2+(f(b)-f(a))^2}$$
$$<\sqrt{(x_0-a)^2+(f(x_0)-f(a))^2}+\sqrt{(b-x_0)^2+(f(b)-f(x_0))^2}$$

即$\sqrt{1+k_{ab}^2}<\dfrac{x_0-a}{b-a}\sqrt{1+k_{ax_0}^2}+\dfrac{b-x_0}{b-a}\sqrt{1+k_{x_0b}^2}$,矛盾.

证法四 只需证 $\exists\xi_1,\xi_2\in(a,b)$,使得 $f'(\xi_1)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(\xi_2)$.

(反证法)假设 $\forall x\in(a,b)$,$f'(x)\geqslant\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 构造函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),x\in[a,b],$$

则
$$F'(x)=\left[f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]'$$
$$=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant 0,x\in(a,b),$$

故 $F(x)$ 在$[a,b]$单调增加，因为 $F(a)=F(b)=0$，故 $F(x)\equiv 0$，即

$$f(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),x\in[a,b],$$

这与 $f(x)$ 非线性矛盾.

若假设 $\forall x\in(a,b),f'(x)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 也会得到同样的矛盾.

例 3.1.7　设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界且二阶可导，则 $\exists\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f''(\xi)=0$.

证法一（反证法）　假设 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f''(x)\neq 0$，由 Darboux 定理知，$f''(x)$ 在(a,b)不变号. 不妨设 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f''(x)>0$，推出 $f'(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$单调.

由 Lagrange 中值定理，

$$\text{对 }\forall n\in N_+,\frac{f(2n)-f(n)}{n}=f'(x_n),x_n\text{ 介于 }n,2n\text{ 之间}.$$

注意到 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界，推得 $\lim\limits_{n\to+\infty}f'(x_n)=0$，再结合 $f'(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

同理可证 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$. 这样利用例 3.1.2 的结论可知，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$，这与假设又矛盾.

证法二（反证法）　在证法一同样的假设前提下，由 Darboux 定理知，$f''(x)$ 在(a,b)不变号. 不妨设 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上为凸函数.

设 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f'(x_0)\neq 0$（这是一定存在的，否则 $f'(x)\equiv 0$，$f''(x)\equiv 0$，这与假设矛盾）.

由于可微凸函数位于其曲线上每一点切线的上方，从而

$$\forall x\in(-\infty,+\infty),f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

若 $f'(x_0)>0$，则 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\to+\infty,(x\to+\infty)$，推得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

若 $f'(x_0)<0$，则 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\to+\infty,(x\to-\infty)$，推得 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

上述两情形都与 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界相矛盾，故假设不成立，命题结论得证.

例 3.1.8 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且 $\exists M>0$，对 $\forall x\in[0,+\infty)$，有 $|f'(x)|\leqslant M|f(x)|$，证明 $f(x)\equiv 0$.

证法一 注意到 $f(0)=0$，对 $\forall x>0$，有

$$|f(x)|=|f(x)-f(0)|=|f'(x_1)|x\leqslant Mx|f(x_1)|\leqslant Mx|f(x_1)-f(0)|$$
$$=Mxx_1|f'(x_2)|\leqslant M^2xx_1|f(x_2)|=\cdots,$$

结合这个结果考虑证明 $|f(x)|\leqslant$ 正无穷小量，为此限制 $x\in\left[0,\frac{1}{2M}\right]$，就有

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2^n}|f(x_n)|.$$

又 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2M}\right]$ 是有界的，故在 $\left[0,\frac{1}{2M}\right]$ 上 $f(x)\equiv 0$.

同理在 $\left[\frac{1}{2M},\frac{2}{2M}\right]$，$\left[\frac{2}{2M},\frac{3}{2M}\right]$，…，上 $f(x)\equiv 0$.

证法二（反证法） 假设 $\exists b>0$，使得 $f(b)\neq 0$. 不妨设 $f(b)>0$，令

$$a=\inf\{x\,|\,f(x)\text{ 在 }(x,b]\text{ 上恒正},x\geqslant 0\},$$

则 $f(a)=0$（否则将与下确界定义矛盾）且 $\forall x\in(a,b]$，$f(x)>0$. 再令

$$F(x)=\ln f(x),x\in(a,b],$$

一方面，$|F'(x)|=\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\leqslant M$，则有

$$|f(x)|\leqslant|F(b)|+|F'(\xi)||x-b|\leqslant|F(b)|+M(b-a),$$

故 $F(x)$ 在 $(a,b]$ 有界.

另一方面，$f(a)=0$，故 $\lim\limits_{x\to a+}F(x)=\lim\limits_{x\to a+}\ln f(x)=-\infty$，矛盾.

例 3.1.9 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

(1) $\exists\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2$；

(2) $\exists\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

证明 (1) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，则

对于 $\frac{1}{2}$：$f(0)<\frac{1}{2}<f(1)$，必存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=\frac{1}{2}$.

在$[0,c]$与$[c,1]$上分别应用 Lagrange 中值定理得

$$\exists \xi \in (0,c), \frac{1}{2} = f(c) - f(0) = f'(\xi)(c-0), \text{即} \frac{1}{f'(\xi)} = 2c,$$

$$\exists \eta \in (c,1), \frac{1}{2} = f(1) - f(c) = f'(\eta)(1-c), \text{即} \frac{1}{f'(\eta)} = 2(1-c).$$

从而$\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2$.

(2) 构造 $F(x) = f(x) + x - 1, x \in [0,1]$，则 $F(x)$ 在$[0,1]$连续，且 $F(0) = -1, F(1) = 1$. 根据零点定理知，必存在 $c \in (0,1)$，使得 $F(c) = 0$，即 $f(c) = 1 - c$. 在$[0,c]$与$[c,1]$上分别应用 Lagrange 中值定理得

$$\exists \xi \in (0,c), 1-c = f(c) - f(0) = f'(\xi)(c-0), \text{即 } f'(\xi) = \frac{1-c}{c},$$

$$\exists \eta \in (c,1), c = f(1) - f(c) = f'(\eta)(1-c), \text{即 } f'(\eta) = \frac{c}{1-c},$$

从而 $f'(\xi)f'(\eta) = 1$.

下面的例 3.1.10 中也是利用介值性定理，它是 Lagrange 中值定理的反问题.

Lagrange 中值定理回答了这样一个问题：

一个区间 I 上的函数 $f(x)$ 满足一定条件时，对 I 中任意不同的两个点 x_1, x_2，会存在介于 x_1, x_2 之间的 ξ，使得 $f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

那么反过来，当区间 I 上的函数 $f(x)$ 满足怎样条件时，对 I 中任意点 ξ，会存在 x_1, x_2，使得 ξ 介于 x_1, x_2 之间，且有 $f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ 呢？

例 3.1.10　设函数 $f(x)$ 为(a,b)上的可导严格凸函数，则对 $\forall \xi \in (a,b)$，$\exists x_1, x_2 \in (a,b)$，且 $x_1 < \xi < x_2$，使得 $f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

证明　任取 $\xi, x_1, x_2 \in (a,b)$，且 $x_1 < \xi < x_2$.

若 $f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$，则结论成立.

若 $f'(\xi) \neq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$，不妨设 $f'(\xi) > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

构造函数　$F(x) = f(x) - f(x_2) - f'(\xi)(x - x_2), x \in [x_1, \xi]$,

则 $$F(x_1)=(x_1-x_2)\left(\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}-f'(\xi)\right)>0,$$

因 $f(x)$ 为(a,b) 上的可导凸函数，故有

$$f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\forall x\in(a,b),x\neq x_0,$$

进而 $$\begin{aligned}F(\xi)&=f(\xi)-f(x_2)-f'(\xi)(\xi-x_2)\\&=[f(\xi)+f'(\xi)(x_2-\xi)]-f(x_2)<0.\end{aligned}$$

由零点定理知，$\exists x_3\in(x_1,\xi)$，使得 $F(x_3)=0$，即 $f'(\xi)=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$，$x_3<\xi<x_2$.

3.1.4 Cauchy 中值定理与 Taylor 公式

例 3.1.11 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上具有三阶导数，证明：

$\exists\xi\in(a,b)$，使 $f(b)=f(a)+\dfrac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\dfrac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi)$.

证法一（利用 Cauchy 中值定理） 即证

$\exists\xi\in(a,b)$，使$$\frac{f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]}{(b-a)^3}=-\frac{1}{12}f'''(\xi).$$

构造函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)[f'(a)+f'(x)],G(x)=(x-a)^3,$$

求得 $$F'(x)=\frac{1}{2}[f'(x)-f'(a)]-\frac{1}{2}(x-a)f''(x),G'(x)=3(x-a)^2,$$

$$F''(x)=-\frac{1}{2}(x-a)f'''(x),G''(x)=6(x-a),$$

$$F(a)=F'(a)=0,G(a)=G'(a)=0.$$

应用 Cauchy 中值定理有，

$$\begin{aligned}&\frac{f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]}{(b-a)^3}\\&=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}\\&=\frac{F'(\xi_1)-F'(a)}{G'(\xi_1)-G'(a)}=\frac{F''(\xi)}{G''(\xi)}=-\frac{1}{12}f'''(\xi).\end{aligned}$$

证法二（待定系数法）

设实数 k 满足等式

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3k,$$

往证 $\exists\xi\in(a,b),k=f'''(\xi)$.

为此构造函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)[f'(a)+f'(x)]+\frac{1}{12}(x-a)^3k,$$

求得 $$F'(x)=\frac{1}{2}f'(x)-\frac{1}{2}f'(a)-\frac{1}{2}(x-a)f''(x)+\frac{1}{4}(x-a)^2k,$$

则 $F(b)=F(a)=0$，根据 Rolle 定理知，$\exists\xi_1\in(a,b)$，使得 $F'(\xi_1)=0$.

注意到 $F'(a)=0$，再由 Rolle 定理知，$\exists\xi\in(a,\xi_1)$，使得 $F''(\xi)=0$.

因 $F''(x)=-\frac{1}{2}(x-a)f'''(x)+\frac{1}{2}(x-a)k$,

故 $F''(\xi)=-\frac{1}{2}(\xi-a)f'''(\xi)+\frac{1}{2}(\xi-a)k=0$，得 $k=f'''(\xi)$.

注　从两种证法的证明过程都可以看出，条件"函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有三阶导数"可以改为"函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上具有三阶导数".

例 3.1.12　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有三阶导数，$f''(a)=f''(b)=0$，证明：

(1) $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]+\frac{1}{6}(b-a)^3f'''(\xi)$；

(2) $\exists\eta\in(a,b)$，使 $f(b)=f(a)+\frac{1}{8}(b-a)[f'(a)+f'(b)]+\frac{1}{24}(b-a)^3f'''(\eta)$.

证明　(1) 利用 Taylor 公式将 $f(b)$ 在 a 处展开，$f(a)$ 在 b 处展开，再对应相减可得结论.

(2) 利用 Taylor 公式将 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 分别在 a,b 处展开，再对应相减可得结论.

注　经常采用一些带有对称性的 Taylor 公式展开，得到一些有趣结果，这类展开方式包括：

① 将 $f(b)$ 在 a 处展开，$f(a)$ 在 b 处展开；② 将 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 分别在 a,b 处展开；

③ 将 $f(b),f(a)$ 分别在$\frac{a+b}{2}$处展开；④ 将 $f(x+h),f(x-h)$ 在 x 处展开.

比如，利用 Taylor 公式将 $f(b),f(a)$ 分别在$\frac{a+b}{2}$处展开，可以得到上例的结论(2)的又一证法.

我们还将在下一节作为与导数有关的极限问题来讨论带 Peano 余项的 Taylor 公式及其应用.

思考题 3.1

1. 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在$(a,b]$可导，且 $f(a)f(b)\leqslant 0, f(b)f'(b)<0$ 则

$$\exists \xi \in (a,b)，使得\ f'(\xi)=0.$$

2. 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上具有二阶导数，$a<c<b$，则

$\exists \xi \in (a,b)$，使得$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(c)}{(c-b)(c-a)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}=\frac{1}{2}f''(\xi)$.

3. 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上具有三阶导数，证明：

$\exists \eta \in (a,b)$，使 $f(b)=f(a)+(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3 f'''(\eta)$.

4. 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上具有二阶导数，证明：

(1) $\exists \xi \in (a,b)$，使 $f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi)$；

(2) 若 $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使$|f''(\xi)|\geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

(3) 若 $f'(a)=f'(b)=0$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=-\frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi).$$

(4) 若 $f'(a)=f'(b)=0$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使

$$|f''(\xi)|\geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上二阶可导，又 $M_k=\sup\limits_{x\in R}|f^{(k)}(x)|<+\infty, k=0,1,2$，证明：$M_1^2\leqslant 2M_0M_2$.

6. 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明：

(1) 对 $\forall m_1,m_2>0, \exists x_1,x_2\in(0,1)$，使得

$$m_1 f'(x_1) + m_2 f'(x_2) = m_1 + m_2;$$

(2) 对 $\forall m_1, m_2 > 0$，$\exists \xi, \eta \in (0,1)$，使得

$$\frac{m_1}{f'(\xi)} + \frac{m_2}{f'(\eta)} = m_1 + m_2.$$

7. 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导，且 $f'_+(a) \neq f'_-(b)$，η 满足 $f'_+(a) < \eta < f'_-(b)$ 或 $f'_+(a) > \eta > f'_-(b)$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = \eta$.（仿照例 3.1.1 证之）

3.2　与导数有关的极限问题

导数是函数变化率（函数在一点处差商的极限），其本身是用极限定义的，因此与导数有关的极限问题不仅包括能够利用导数概念解决的问题，也包括利用导数的四则运算法则、导数极限定理、L'Hospital 法则以及带 Peano 余项的 Taylor 公式.

3.2.1　导数概念的应用

定义 3.2.1　设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上有定义，A 为有限数. $f(x)$ 在 x_0 可导的等价陈述主要包括：

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$ 或 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$；

(2) 点 x_0 是 $F(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 的可去间断点；

(3) $\forall x \in U(x_0)$，$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$，这里的 A 被记为 $f'(x_0)$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.（这是微分定义）

例 3.2.1　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，$\alpha_n < x_0 < \beta_n$，$\forall n \in \mathbf{N}_+$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = x_0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x_0).$$

证法一　由已知条件及 Heine 定理知，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} = f'(x_0), \lim_{n\to\infty} \frac{f(\alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n - x_0} = f'(x_0),$$

于是,对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N$,有

$$\left|\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n - x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon, \left|\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n - x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon,$$

或
$$|f(\beta_n) - f(x_0) - (\beta_n - x_0)f'(x_0)| < \varepsilon(\beta_n - x_0),$$
$$|f(\alpha_n) - f(x_0) - (\alpha_n - x_0)f'(x_0)| < \varepsilon(x_0 - \alpha_n).$$

进而 $|f(\beta_n) - f(\alpha_n) - (\beta_n - \alpha_n)f'(x_0)| = |[f(\beta_n) - f(x_0) - (\beta_n - x_0)f'(x_0)] - [f(\alpha_n) - f(x_0) - (\alpha_n - x_0)f'(x_0)]| < \varepsilon(\beta_n - \alpha_n)$.

于是,对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N$,有 $\left|\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x_0)$.

证法二 由导数定义的等价形式

$$\forall x \in U(x_0), f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

可推知,
$$\begin{aligned} f(\beta_n) &= f(x_0) + f'(x_0)(\beta_n - x_0) + o(\beta_n - x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(\beta_n - x_0) + o(\beta_n - \alpha_n), \\ f(\alpha_n) &= f(x_0) + f'(x_0)(\alpha_n - x_0) + o(\alpha_n - x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(\alpha_n - x_0) + o(\beta_n - \alpha_n), \end{aligned}$$

进而 $f(\beta_n) - f(\alpha_n) = f'(x_0)(\beta_n - \alpha_n) + o(\beta_n - \alpha_n)$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x_0)$.

例 3.2.2 设函数 $f(x)$ 在点 a 可导且 $f(a) \neq 0$,求 $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n$.

证明 不妨设 $f(a) > 0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right) - \ln f(a)}{\frac{1}{n}} = [\ln f(x)]'|_{x=a} = \frac{f'(a)}{f(a)}.$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln f(a+\frac{1}{n}) - \ln f(a)}{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

例 3.2.3 设函数 $f(x)$ 在点 a 连续且 $|f(x)|$ 在点 a 可导,则 $f(x)$ 在点 a 可导.

证明　当 $f(a)\neq 0$ 时，由保号性知，存在邻域 $U(a)$，有 $f(x)=|f(x)|$ 或 $f(x)=-|f(x)|$，这时 $|f(x)|$ 在 a 可导显然蕴含着 $f(x)$ 在 a 可导.

当 $f(a)=0$ 时，$(|f(x)|)'|_{x=a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{|f(x)|}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{|f(x)|}{x-a}$，再由保号性知，$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{|f(x)|}{x-a}\geqslant 0$，$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{|f(x)|}{x-a}\leqslant 0$，从而 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|}{x-a}=0$.

注意到 $\left|\dfrac{|f(x)|}{x-a}\right|=\left|\dfrac{f(x)}{x-a}\right|=\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|$，就有

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0.$$

例 3.2.4　$f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是 $f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0)$，$x\in U(x_0)$，其中 $H(x)$ 在 x_0 连续.

证明　"⇒"由 $f(x)$ 在点 x_0 处可导推知点 x_0 是函数 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的可去间断点，令

$$H(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0\\ f'(x_0), & x=x_0\end{cases},$$

则 $H(x)$ 在 x_0 连续，且 $f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0)$.

"⇐"由 $f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0)$ 及 $H(x)$ 在 x_0 连续，推得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}H(x)=H(x_0)\text{，即 } f'(x_0)=H(x_0).$$

3.2.2　L'Hospital 法则

例 3.2.5（导数极限定理）　设函数 $f(x)$ 在 $U(a)$ 连续，在 $\mathring{U}(a)$ 可导，且极限 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 a 可导，且 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}f'(x)$（对于单侧情形也成立！）

证法一（利用 L'Hospital 法则）

由条件及 L'Hospital 法则知，

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))'}{(x-a)'}=\lim_{x\to a}f'(x).$$

证法二（利用 Lagrange 中值定理）

任取 $x \in \mathring{U}(a)$，由条件及 Lagrange 中值定理知，

$$\exists \xi \in (a,x)(\text{或 } \exists \xi \in (x,a))\text{，有}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi),$$

于是 $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}f'(\xi)=\lim_{\xi\to a}f'(\xi)$$

例 3.2.6 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 3\\ ax+b, & x<3\end{cases}$，确定 a,b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=3$ 处可导.

解 为使 $f(x)$ 在 $x=3$ 处可导，首先必有 $f(x)$ 在 $x=3$ 处连续，从而

$$f(3+0)=f(3-0)=f(3)\text{，即 } 3a+b=9.$$

由导数极限定理：

$$f'_+(3)=\lim_{x\to 3^+}f'(x)=\lim_{x\to 3^+}2x=6,\ f'_-(3)=\lim_{x\to 3^-}f'(x)=\lim_{x\to 3^-}a=a,$$

故 $a=6$，进而 $b=-9$.

例 3.2.7 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 具有二阶导数，且 $g(0)=1$，试确定 a 值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，并在此基础上进一步求 $f'(0)$.

解法一（利用 L'Hospital 法则）

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必须 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=a$.

而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)+\sin x}{1}=g'(0)$，从而 $a=g'(0)$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-g'(0)x}{x^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{g'(x)-g'(0)}{2x}+\frac{\sin x}{2x}\right)=\frac{1}{2}[g''(0)+1].$$

解法二（利用带 Peano 余项的 Taylor 公式）

将 $g(x)$ 和 $\cos x$ 在 $x=0$ 处展成 Taylor 公式（注意 $g(0)=1$）：

$$g(x) = 1 + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2 + o(x^2),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

则$\dfrac{g(x) - \cos x}{x} = g'(0) + \dfrac{1}{2}[g''(0) + 1]x + o(x)$，进而求得 a 及 $f'(0)$.

例 3.2.8　证明：若 $f''(a)$ 存在，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2} = f''(a)$.

证法一（利用 Rolle 定理）　令$\dfrac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2} = A$，$A$ 是关于 h 的函数. 则

$$f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) - Ah^2 = 0.$$

令
$$F(t) = f(a+2t) - 2f(a+t) + f(a) - At^2,$$

则　$F'(t) = 2f'(a+2t) - 2f'(a+t) - 2At$，$F(0) = F(h) = 0$，

由 Rolle 定理知，$\exists\, c_h$ 介于 $0, h$ 之间，使得 $F'(c_h) = 0$，

从而 $A = \dfrac{f'(a+2c_h) - f'(a+c_h)}{c_h}$，

$$\lim_{h\to 0} A = \lim_{c_h\to 0}\frac{f'(a+2c_h) - f'(a+c_h)}{c_h}$$

$$= \lim_{c_h\to 0}\left(\frac{f'(a+2c_h) - f'(a)}{c_h} - \frac{f'(a+c_h) - f'(a)}{c_h}\right) = f''(a).$$

证法二（利用 Canchy 中值定理）

令　$F(t) = f(a+2t) - 2f(a+t) + f(a)$，$G(t) = t^2$，$t \in [0,h]$ 或 $[h,0]$，$h \neq 0$. 则

$$F'(t) = 2f'(a+2t) - 2f'(a+t),\quad G'(t) = 2t,$$

则由 Canchy 中值定理知，

$$\frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2} = \frac{F(h) - F(0)}{G(h) - G(0)} = \frac{F'(c_h)}{G'(c_h)}$$

$$= \frac{f'(a+2c_h) - f'(a+c_h)}{c_h},$$

c_h 在 $0, h$ 之间. 从而，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2f'(a+2c_h)-2f'(a+c_h)}{2c_h}=f''(a).$$

证法三(利用 L'Hospital 法则)

令 $$F(h)=f(a+2h)-2f(a+h)+f(a),G(h)=h^2$$

则 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{F(h)}{G(h)}=\lim_{h\to 0}\frac{F'(h)}{G'(h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2f'(a+2h)-2f'(a+h)}{2h}=f''(a).$$

证法四(利用带Peano余项的Taylor公式) 因 $f''(a)$ 存在,由 Taylor公式知,

$$\forall x\in U(a),f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+o[(x-a)^2],$$

令 $x=a+2h,x=a+h$(h 充分小),就有

$$f(a+2h)=f(a)+f'(a)\cdot 2h+\frac{f''(a)}{2}\cdot 4h^2+o(4h^2)\tag{3.2.1}$$

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\cdot h+\frac{f''(a)}{2}\cdot h^2+o(h^2)\tag{3.2.2}$$

将式(3.2.1)、式(3.2.2)代入要证左端,有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(a)h^2+o(h^2)}{h^2}=f''(a).$$

例 3.2.9 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 可导,证明下述结论:

(1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 都存在,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$;

(3) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

证明 这三个是应用 $\frac{*}{\infty}$ L'Hospital 法则的典型题目.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\frac{*}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{1}=0.$

(2) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在,推得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$,又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在,推得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $\overset{\frac{*}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$,于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0.$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x f(x)}{e^x} \overset{\frac{*}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x f(x) + e^x f'(x)}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) + f'(x)] = 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) + f'(x) - f(x)] = 0$.

例 3.2.10　设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上三阶可导，又 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to\infty} f'''(x)$ 存在，证明

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f''(x) = \lim_{x\to\infty} f'''(x) = 0.$$

证明　由 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，可推得 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^3} = 0$，连续使用三次 L'Hospital 法则，又有 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'''(x)}{6}$，故 $\lim\limits_{x\to\infty} f'''(x) = 0$.

将 $f(x+1)$，$f(x-1)$ 在 x 处展开成带 Lagrange 余项的 Taylor 公式(其中 $x \in \mathbf{R}$)：

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) + \frac{1}{6} f'''(\xi_1),$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) - \frac{1}{6} f'''(\xi_2),$$

其中 $x-1 < \xi_2 < x < \xi_1 < x+1$.

两式相加得：

$$f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) - \frac{1}{6} f'''(\xi_1) + \frac{1}{6} f'''(\xi_2),$$

两式相减得：

$$f'(x) = \frac{1}{2} f(x+1) - \frac{1}{2} f(x-1) - \frac{1}{12} f'''(\xi_1) - \frac{1}{12} f'''(\xi_2),$$

令 $x \to \infty$ 推得 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0$.

思考题 3.2

1. 已知函数 $f(x)$，其在 $U(0)$ 内满足 $f(x+y) = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$，且 $f'(0) = 1$，求 $f'(x)$.

2. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，$x_0 < \alpha_n < \beta_n$，$\forall n \in N_+$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = x_0$，$\left\{\dfrac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n}\right\}$ 为有界数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x_0)$.

3. 若 $f''(a)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$.

4. 若 $f'(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

5. 函数 $f(x)$ 在区间 I 一致可微的充分必要条件是 $f'(x)$ 在区间 I 一致连续.

3.3 函数的单调性与凸性

本节给出函数单调性、凸性的导数判别法，并利用这些特性证明或创建一些不等式.

3.3.1 函数的单调性

命题 1（单调性判别法） 设函数 $f(x)$ 在区间 I 连续且在区间 I 的内部 $\mathring{I}$ 可导，则

(1) 当 $f'(x)\geqslant 0(>0)$ 时，$f(x)$ 为区间 I 上的（严格）单调增加函数；

(2) 当 $f'(x)\leqslant 0(<0)$ 时，$f(x)$ 为区间 I 上的（严格）单调减少函数.

证明 仅证(1)，设任意 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1\neq x_2$，

因为函数 $f(x)$ 在区间 I 连续且在区间 I 的内部 $\mathring{I}$ 可导，故 $f(x)$ 在以 x_1,x_2 为端点构成的闭区间满足 Lagrange 中值定理，故有，

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)\geqslant 0(>0)\text{，其中 }\xi\text{ 介于 }x_1,x_2\text{ 之间，}\xi\in\mathring{I}.$$

即 $f(x)$ 为区间 I 上的（严格）单调增加函数.

例 3.3.1 设 $0<x<1$，求证 $e^{-1}>xe^{-x}>\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$.

证明 先证 $e^{-1}>xe^{-x}$.

令 $f(x)=xe^{-x}, x\in(0,1]$，则 $f'(x)=e^{-x}(1-x)\geqslant 0$，且仅在 $x=1$ 处等于 0，故 $f(x)=xe^{-x}$ 在 $(0,1]$ 严格递增，从而 $0<x<1$ 时，$f(1)>f(x)$，即 $e^{-1}>xe^{-x}$.

再证 $xe^{-x}>\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$，即证 $x^2e^{\frac{1}{x}-x}>1$.

令 $g(x)=x^2e^{\frac{1}{x}-x}, x\in(0,1]$，则 $g'(x)=-e^{\frac{1}{x}-x}(x+1)^2<0$，故 $g(x)=x^2e^{\frac{1}{x}-x}$

在(0,1] 严格递减,从而 $0 < x < 1$ 时,$g(x) > g(1)$,即 $xe^{-x} > \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$.

例 3.3.2　设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$,$\alpha \leqslant 2$,求证:$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\alpha} < \frac{\tan x}{x}$.

证明　当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时,$\frac{x}{\sin x} > 1$,故 $\alpha \leqslant 2$ 时,$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\alpha} \leqslant \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{2}$,下面来证明不等式:

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{2} < \frac{\tan x}{x},\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

该不等式等价于 $\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{3} < \frac{1}{\cos x}$ 或 $\sin x\cos^{-\frac{1}{3}}x - x > 0$.

令 $f(x) = \sin x\cos^{-\frac{1}{3}}x - x$,则

$$f'(x) = \cos^{\frac{2}{3}}x + \frac{1}{3}\cos^{-\frac{4}{3}}x \cdot \sin^2 x - 1,$$

$$f''(x) = \frac{4}{9}\cos^{-\frac{7}{3}}x \cdot \sin^3 x > 0, x \in (0,\frac{\pi}{2}).$$

从而 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时,$f'(x) > f'(0) = 0$,$f(x) > f(0) = 0$,即 $\sin x\cos^{-\frac{1}{3}}x - x > 0$.

注　由上面的例子所给出的不等式还可以得到一些具体的不等式:

当 $\alpha = 0$ 时,$1 < \frac{\tan x}{x}$ 或 $\tan x > x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$;

当 $\alpha = 1$ 时,$\frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

对于 $0 < x < \frac{\pi}{2}$,$\frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{x}$,还有很多方法,例如可以如下证明:

将 $\frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{x}$ 转化为 $\tan x\sin x - x^2 > 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}$. 令

$$f(x) = \tan x\sin x - x^2, x \in [0,\frac{\pi}{2}),$$

则 $f'(x) = (\sec^2 x + 1)\sin x - 2x \geqslant 2\sec x\sin x - 2x = 2(\tan x - x) > 0, x \in (0,\frac{\pi}{2})$,于是 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 严格增加,$f(x) > f(0)$,即得结论.

对于 $\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{2} < \frac{\tan x}{x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$,又可以得到下面两个不等式:

(1) $\tan x+2\sin x>3x, 0<x<\frac{\pi}{2}$(Huygens(惠更斯) 不等式);

(2) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\tan x}{x}>2, 0<x<\frac{\pi}{2}$(Wilker 不等式).

对于(1),$\frac{\tan x}{x}+\frac{2\sin x}{x}>\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2+\frac{2\sin x}{x}=\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2+\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin x}{x}\geqslant 3$.

对于(2),$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\tan x}+\frac{\tan x}{x}\geqslant 2$.

例 3.3.3 设 $b>a>0$,则 $\sqrt{ab}<\frac{b-a}{\ln b-\ln a}<\frac{a+b}{2}$($\frac{b-a}{\ln b-\ln a}$ 称为两个正数的对数平均).

分析 要证不等式等价于

$$\frac{2(b-a)}{a+b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

令 $x=\frac{b}{a}$,则上述不等式化为

$$\frac{2(x-1)}{x+1}<\ln x<\frac{x-1}{\sqrt{x}}, x>1,$$

于是问题归结为研究:$f(x)=\ln x-\frac{x-1}{\sqrt{x}}, f(1)=0$ 及 $g(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}, g(1)=0$ 在$[1,+\infty)$的严格单调性.

例 3.3.4 设 $a>0,b>0$,证明$\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1}\geqslant\left(\frac{a}{b}\right)^b$.

证法一 所证不等式等价于

$$(b+1)[\ln(a+1)-\ln(b+1)]\geqslant b(\ln a-\ln b).$$

当 $a=b$ 时,显然成立. 当 $a\neq b$ 时,又等价于

$$\begin{cases}\dfrac{\ln(a+1)-\ln(b+1)}{\ln a-\ln b}\geqslant\dfrac{b}{b+1}, & a>b>0\\[2mm] \dfrac{\ln(a+1)-\ln(b+1)}{\ln a-\ln b}\leqslant\dfrac{b}{b+1}, & b>a>0\end{cases},$$

为此对函数 $\ln(x+1)$,$\ln x$ 在$[a,b]$或$[b,a]$上应用 Cauchy 中值定理知,

$$\frac{\ln(a+1)-\ln(b+1)}{\ln a-\ln b}=\frac{\xi}{1+\xi},$$

注意到函数 $g(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是递增的，于是，

$$\text{当 } a>b>0 \text{ 时，有 } b<\xi<a, \frac{\xi}{\xi+1}>\frac{b}{b+1};$$

$$\text{当 } b>a>0 \text{ 时，有 } a<\xi<b, \frac{\xi}{\xi+1}<\frac{b}{b+1}.$$

结论得证.

证法二　所证不等式等价于

$$\frac{(a+1)^{1+\frac{1}{b}}}{a}\geqslant\frac{(b+1)^{1+\frac{1}{b}}}{b}, a>0, b>0.$$

问题归结为讨论函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^{1+\frac{1}{b}}}{x}$，$b>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值问题. 这又可归结为讨论 $g(x)=\ln f(x)=\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\ln(x+1)-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值问题.

由于 $g'(x)=\dfrac{x-b}{bx(x+1)}$，$0<x<b$ 时 $g'(x)<0$，$x>b$ 时 $g'(x)>0$，

故 $x=b$ 时 $f(x)$ 取得最小值 $f(b)=\dfrac{(b+1)^{1+\frac{1}{b}}}{b}$，结论得证.

（所证不等式还等价于 $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^b(a+1)\geqslant\left(1+\dfrac{1}{b}\right)^b(b+1)$，$a>0$，$b>0$，于是问题又可归结为函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^b(1+x)$，$b>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值问题）

例 3.3.5　设 $a>b>\mathrm{e}$，求证 $b^a>a^b$.

分析　要证不等式等价于

$$b^{\frac{1}{b}}>a^{\frac{1}{a}}, \text{或} \frac{1}{b}\ln b>\frac{1}{a}\ln a,$$

问题归结为研究函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln x$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 的单调性.

3.3.2　函数的凸性

凸函数概念如下：

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若对 $\forall x_1, x_2\in I$，$\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 为 I 上的凸函数. 若不等式反向,则称函数 $f(x)$ 为 I 上凹函数.

若对 $\forall x_1,x_2\in I,x_1\neq x_2,\forall \lambda\in(0,1)$,有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 为 I 上的严格凸函数.

函数 $f(x)$ 为 I 上的凸函数当且仅当对于 I 上任意三点 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3$,总有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

上述凸函数概念的更一般形式是 Jensen(詹森) 不等式,即

函数 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数,当且仅当 $\forall q_i\in(0,1),\sum_{i=1}^{n}q_i=1,\forall x_i\in I$, $i=1,2,\cdots,n$,有

$$f(q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_nx_n)\leqslant q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_nf(x_n).$$

例 3.3.6 用凸函数定义证明下述结论:

(1) 若 f 是区间 I 上的凸(凹) 函数,则 $-f$ 是 I 上的凹(凸) 函数;

(2) $f(x)=|x|$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的凸函数;

(3) $f(x)=x^2$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的严格凸函数.

证明留作读者练习. 我们会发现每一个凸函数会与一个不等式相对应,与之对应的不等式我们统称为凸不等式.

例 3.3.7 设函数 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数,则以下结论必成立其一:

(1) $f(x)$ 在 $[a,b)$ 单调递减;

(2) $f(x)$ 在 $(a,b]$ 单调递增;

(3) $\exists x_0\in(a,b)\,|\,,f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 单调递减,在 $[x_0,b]$ 单调递增.

证明 容易证明 $[a,b]$ 上的凸函数 $f(x)$,其在端点处存在 $f(a+0),f(b-0)$(见思考题 1.5 的第 3 题),且 $f(a+0)\leqslant f(a),f(b-0)\leqslant f(b)$.

构造

$$F(x)=\begin{cases}f(a+0), & x=a\\ f(x), & x\in(a,b),\\ f(b-0), & x=b\end{cases}$$

则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续凸函数. 设 $f(x)$ 在 $x_0\in[a,b]$ 达到最小值,

(1) 若 $x_0 = b$，则对 $\forall x_1, x_2 \in [a,b)$，且 $x_1 < x_2 < b$，则

$$F(x_2) - F(x_1) \leqslant \frac{x_2 - x_1}{b - x_1}[F(b) - F(x_1)] \leqslant 0,$$

从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，又因为 $F(a) \leqslant f(a)$，故 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 单调递减.

(2) 若 $x_0 = a$，则对 $\forall x_1, x_2 \in (a,b]$，且 $a < x_1 < x_2$，则

$$F(x_1) - F(x_2) \leqslant \frac{x_2 - x_1}{x_2 - a}[F(a) - F(x_2)] \leqslant 0,$$

从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 单调递增，又因为 $F(b) \leqslant f(b)$，故 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 单调递增.

(3) 若 $x_0 \in (a,b)$，由(1)，(2) 的证明过程可知 $F(x)$ 在 $[a, x_0]$ 单调递减，在 $[x_0, b]$ 单调递增，又因为 $F(b) \leqslant f(b)$，$F(a) \leqslant f(a)$，故 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$ 单调递减，在 $[x_0, b]$ 单调递增.

命题 2(凸性判别法)　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上具有二阶导数，则

(ⅰ) 当 $f''(x) \geqslant 0 (> 0)$ 时，$f(x)$ 为 I 上的(严格)凸函数；

(ⅱ) 当 $f''(x) \leqslant 0 (< 0)$ 时，$f(x)$ 为 I 上的(严格)凹函数.

例 3.3.8　证明加权均值不等式

设 $x_i > 0, q_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$，且 $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$，则 $\prod_{i=1}^{n} x_i^{q_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_i x_i$.

证明　对于 $f(x) = \ln x, x \in (0, +\infty)$，由于 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$，所以 $f(x) = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 为凹函数，根据凹函数的 Jensen 不等式得

$$\ln(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_n x_n) \geqslant q_1 \ln x_1 + q_2 \ln x_2 + \cdots + q_n \ln x_n = \ln \prod_{i=1}^{n} x_i^{q_i},$$

从而要证不等式成立.

在上述加权均值不等式中，特取 $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = \frac{1}{n}$，得到均值不等式：

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}，其中\ x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n.$$

又特取 $q_1 = \frac{1}{p}, q_2 = \frac{1}{q}, x_1 = a^p, x_2 = b^q, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，可得到 Young(杨氏)不等式：

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \ 或\ a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b.$$

（请读者考虑上述一些不等式取“=”的条件）.

Young 不等式还有一些其它的证法，与函数凸性相关的另一证法见下例.

例 3.3.9 证明：（Young 不等式）若 $a>0,b>0$，且 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则 $ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$.

证明 在题设条件下，所证不等式 $ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$ 等价于

$$\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{1}{p}\cdot\frac{a^p}{b^q}-\frac{1}{p}+1.$$

令 $x=\frac{a^p}{b^q},\alpha=\frac{1}{p}$，显然 $x>0,0<\alpha<1$，由此问题归结为证明下面结论：

若 $x>0,0<\alpha<1$，则 $x^\alpha\leqslant\alpha x-\alpha+1$.

事实上，当 $0<\alpha<1,f(x)=x^\alpha$ 在 $[0,+\infty)$ 为凹函数且可导，从而在 $[0,+\infty)$ 上曲线 $f(x)=x^\alpha$ 位于其在点(1,1)处的切线上方，此时切线方程为 $y=\alpha x-\alpha+1$，于是 $x^\alpha\leqslant\alpha x-\alpha+1$.

例 3.3.10 当 $0\leqslant x\leqslant1$ 及 $p>1$ 时，有 $2^{1-p}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant1$.

证法一 令 $g(x)=x^p$，当 $p>1$ 时，$g(x)$ 为 $[0,1]$ 上的凸函数，从而

$$\forall x\in[0,1]，有\ 1-x\in[0,1],g\left[\frac{x+(1-x)}{2}\right]\leqslant\frac{g(x)+g(1-x)}{2},$$

即 $2^{1-p}\leqslant x^p+(1-x)^p$. 又当 $0\leqslant x\leqslant1$ 及 $p>1$ 时，$x^p\leqslant x,(1-x)^p\leqslant1-x$，故 $x^p+(1-x)^p\leqslant1$.

证法二 对于 $f(x)=x^p+(1-x)^p,0\leqslant x\leqslant1$，则 $f'(x)=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]$. 解得唯一稳定点 $x_0=\frac{1}{2}\in[0,1]$，比较 $f(0),f(1),f(\frac{1}{2})$ 求得最值得 $2^{1-p}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant1$.

例 3.3.11 证明：$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$，有 $\frac{2}{\pi}x<\sin x$.

证法一 对于 $f(x)=\sin x,x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，因 $f''(x)=-\sin x\leqslant0$，且仅在 0 处取得“=”，所以 $f(x)=\sin x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 严凹.

根据严凹的定义，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，曲线 $f(x)=\sin x$ 严格位于其端点 $(0,0)$，$(\frac{\pi}{2},1)$ 连线段的上方.

端点 $(0,0)$，$(\frac{\pi}{2},1)$ 所在直线方程为 $y=\frac{2}{\pi}x$，于是 $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$，有 $\frac{2}{\pi}x<\sin x$.

证法二　构造函数

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},x\in(0,\frac{\pi}{2}],$$

则

$$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2}],\text{有 } f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，有 $f'(x)=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 严格递减. 于是

$$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2}),\text{有 } f(x)<f(\frac{\pi}{2}),\text{即}\frac{\sin x}{x}<\frac{2}{\pi}\text{ 或}\frac{2}{\pi}x<\sin x.$$

证法三　$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$，要证不等式 $\frac{2}{\pi}x<\sin x$ 等价于 $\frac{\sin x}{x}<\frac{2}{\pi}$

$$\frac{2}{\pi}-\frac{\sin x}{x}=\int_x^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\frac{\sin t}{t}=\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\mathrm{d}t<0.$$

证法四　构造函数 $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x,x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则

$$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi},\text{令 } f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}=0,$$

解得 $x_0=\arccos\frac{2}{\pi}\in(0,\frac{\pi}{2})$，比较 $f(0)$，$f(x_0)$，$f(\frac{\pi}{2})$ 可知，$f(x)$ 仅在端点 $(0,\frac{\pi}{2})$ 处取得最小值 0，于是 $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$，有 $\sin x-\frac{2}{\pi}x>0$ 或 $\frac{2}{\pi}x<\sin x$.

思考题 3.3

1. 设 $x,y>0,\beta>\alpha>0$，证明：$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$.

2. 利用函数凸性证明例 3.3.4.

3. 研究函数 $f(x)=x\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 的单调性、凸性，并创建关于 $f(a+b)$、$f(a)$、$f(b)$ 三者之间的不等式.

3.4 多元函数的可微性

本节内容包括三部分，一是探讨多元函数可微性、偏导数存在性、连续性之间的关系，二是利用复合函数微分法求偏导的计算类题目，三是隐函数(组)微分法.

3.4.1 多元函数的可微性、偏导数存在性、连续性的关系

函数 $z=f(x,y)$ 在(x_0,y_0)的全增量为

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

如果令 $\Delta x=0$ 或 $\Delta y=0$，就会得到 $f(x,y)$ 在(x_0,y_0)两个偏增量为

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

$$\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

如果 $f(x,y)$ 在区域 $D\subset R^n$ 有定义，$(x,y_0)\in D,x\in U(x_0)$，且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=l(\text{有限数}),$$

则称 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)存在关于 x 的偏导数 l(记作 $f_x(x_0,y_0)$ 或$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$).

同理可定义 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)存在关于 y 的偏导数.

如果 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)的某邻域有定义，且

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 A,B 与 $\Delta x,\Delta y$ 无关，$o(\rho)$ 是较 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 高阶的无穷小量(当$(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$时)，则称 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)可微，$\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}=A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)的全微分.

关于二元函数可微性条件有以下三个，必须掌握.

必要条件：

若 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)可微，则 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)连续且 $f_x(x_0,y_0)$ 与 $f_y(x_0,y_0)$ 存在，且 $\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$.

充分条件：

$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)某邻域存在偏导数，且 f_x 与 f_y 在点(x_0,y_0)连续，则 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)可微.

充要条件：

$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)可微的充要条件是曲面 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0,z_0)存在切平面：$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$，其中 $z_0=f(x_0,y_0)$.

例 3.4.1　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^p}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处的连续性、偏导数存在性及可微性.

解　① $\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^p}=\dfrac{xy}{x^2+y^2}(x^2+y^2)^{1-p}$，

当 $p<1$ 时，

注意到$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$(只要 $x^2+y^2\neq 0$)为有界变量，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{1-p}=0$，从而

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}(x^2+y^2)^{1-p}=0=f(0,0),$$

当 $p\geqslant 1$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{(x^2+y^2)^p}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^{2-2p}}{(1+k^2)^p}=\begin{cases}\dfrac{k}{1+k^2}, & p=1\\ \text{不存在}, & p>1\end{cases},$$

总之，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\begin{cases}0, & p<1\\ \text{不存在}, & p\geqslant 1\end{cases}$，

即当 $p<1$ 时，$f(x,y)$ 在$(0,0)$处连续，当 $p\geqslant 1$ 时，$f(x,y)$ 在$(0,0)$处不连续.

② 对任何的 p，都有 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0$ 及 $f_y(0,0)=0$，

此时，$f(x,y)$ 在$(0,0)$处的可微性转化为研究极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$是否为 0(为什么?). 因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{(x^2+y^2)^{p+\frac{1}{2}}}=\begin{cases}0, & p<\dfrac{1}{2}\\ \text{不存在}, & p\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases},$$

即当 $p<\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x,y)$ 在$(0,0)$处可微，当 $p\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x,y)$ 在$(0,0)$处不

可微.

注 由上例,可构造如下反例.

(1) 当 $p \geqslant 1$ 时,$f(x,y)$ 在(0,0)处偏导数存在,但不连续也不可微.例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases},\quad \text{在}(0,0)\text{处}.$$

(2) 当 $\frac{1}{2} \geqslant p < 1$ 时,$f(x,y)$ 在(0,0)处连续,偏导数存在但不可微.例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases},\quad \text{在}(0,0)\text{处}.$$

例 3.4.2 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^p\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,讨论 $f(x,y)$ 在(0,0)处偏导数的存在性、偏导数的连续性及可微性.

解 ① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2p}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}-0}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}x^{2p-1}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2}}=\begin{cases}0, & p>\dfrac{1}{2}\\ \text{不存在}, & p\leqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

从而,当 $p>\frac{1}{2}$ 时,$f(x,y)$ 在(0,0)处偏导数存在,且 $f_x(0,0)=0$ 及 $f_y(0,0)=0$.

② 当 $p>\frac{1}{2}$ 时,$f_x(x,y)$

$$=\begin{cases}2px\,(x^2+y^2)^{p-1}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-(x^2+y^2)^{p-\frac{3}{2}}x\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, (0<\rho<+\infty, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$,计算极限如下:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}2px\,(x^2+y^2)^{p-1}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}2p\rho^{2p-1}\cos\theta\sin\frac{1}{\rho}=0,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)^{p-\frac{3}{2}}x\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\rho^{2p-2}\cos\theta\cos\frac{1}{\rho}$$

$$=\begin{cases}0, & p>1\\ \text{不存在}, & \frac{1}{2}<p\leqslant 1\end{cases},$$

因此，当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时，$f_x(x,y)$在$(0,0)$处不连续，$p>1$时$f_x(x,y)$在$(0,0)$处连续.

③ 当$p>\frac{1}{2}$时，$f_x(0,0)=0$及$f_y(0,0)=0$，此时，$f(x,y)$在$(0,0)$处的可微性转化为研究极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$是否为0. 事实上，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)^{p-\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

即$p>\frac{1}{2}$时$f(x,y)$在$(0,0)$处可微.

注　由上例，可构造如下反例：

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases},$$

$f(x,y)$的偏导数在$(0,0)$处不连续，但$f(x,y)$在$(0,0)$处可微.

例 3.4.3　设$f(x)$，$g(x)$分别在区间$[a,b]$，$[c,d]$上连续，定义

$$F(x,y)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\cdot\int_c^y g(s)\mathrm{d}s,\ (a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d),$$

试用全微分定义证明$F(x,y)$在任意点$(x_0,y_0)\in(a,b)\times(c,d)$都可微.

证明　对(x_0,y_0)，$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in(a,b)\times(c,d)$，

$$\begin{aligned}&F(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-F(x_0,y_0)\\&=\int_a^{x_0+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t\int_c^{y_0+\Delta y}g(s)\mathrm{d}s-\int_a^{x_0}f(t)\mathrm{d}t\int_c^{y_0}g(s)\mathrm{d}s\\&=\int_a^{x_0+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t\int_c^{y_0+\Delta y}g(s)\mathrm{d}s-\int_a^{x_0+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t\int_c^{y_0}g(s)\mathrm{d}s\\&\quad+\int_a^{x_0+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t\int_c^{y_0}g(s)\mathrm{d}s-\int_a^{x_0}f(t)\mathrm{d}t\int_c^{y_0}g(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$= \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} g(s)\mathrm{d}s + \int_c^{y_0} g(s)\mathrm{d}s \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t.$$

因 $f(x),g(x)$ 分别在区间$[a,b]$,$[c,d]$上连续,故由积分上限函数连续性及积分中值定理知:

$$\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t + \alpha_0,$$

$$\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} g(s)\mathrm{d}s = g(y_0 + \theta_1 \Delta y)\Delta y = (g(y_0) + \alpha_1)\Delta y,$$

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t = f(x_0 + \theta_2 \Delta x)\Delta x = (f(x_0) + \alpha_2)\Delta x,\text{其中}\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha_i = 0(i = 0,1,2).$$

于是 $F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0)$

$$= \left(\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t + \alpha_0\right)(g(y_0) + \alpha_1)\Delta y + \int_c^{y_0} g(s)\mathrm{d}s \cdot (f(x_0) + \alpha_2)\Delta x$$

$$= f(x_0)\int_c^{y_0} g(s)\mathrm{d}s\Delta x + g(y_0)\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\Delta y$$

$$+ \alpha_2\int_c^{y_0} g(s)\mathrm{d}s\Delta x + \left[\alpha_1\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t + \alpha_0(g(y_0) + \alpha_1)\right]\Delta y.$$

记 $A = f(x_0)\int_c^{y_0} g(s)\mathrm{d}s, B = g(y_0)\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t,$

$$\alpha = \alpha_2\int_c^{y_0} g(s)\mathrm{d}s, \beta = \alpha_1\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t + \alpha_0(g(y_0) + \alpha_1),\text{其中}\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta = 0.$$

即 $F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$

$F(x,y)$ 在任意点$(x_0, y_0) \in (a,b) \times (c,d)$都可微.

3.4.2 复合函数微分法

复合函数微分法关键在于理清因变量、中间变量、自变量的复合关系.

例 3.4.4 求函数 $z = f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$ 的二阶偏导数.

解 令 $u = xy, v = \frac{y}{x}$,则 $z_x = yf_u - \frac{y}{x^2}f_v, z_y = xf_u + \frac{1}{x}f_v.$

$$z_{xx} = y^2 f_{uu} - 2\frac{y^2}{x^2}f_{uv} + \frac{y^2}{x^4}f_{vv} + \frac{2y}{x^3}f_v,$$

$$z_{xy} = f_u + xyf_{uu} - \frac{1}{x^2}f_v - \frac{y}{x^3}f_{vv},$$

$$z_{yy} = x^2 f_{uu} + 2f_{uv} + \frac{1}{x^2} f_{vv}.$$

例 3.4.5　设 $f(x,y,z)$ 有连续偏导数. 记 $F(u,v,w) = f(\sqrt{vw}, \sqrt{uv}, \sqrt{uw})$,则 $uF_u + vF_v + wF_w = xf_x + yf_y + zf_z$.

证明　令 $x = \sqrt{vw}, y = \sqrt{uv}, z = \sqrt{uw}$.

$$F_u = f_x \frac{\partial x}{\partial u} + f_y \frac{\partial y}{\partial u} + f_z \frac{\partial z}{\partial u} = f_y \frac{v}{2\sqrt{uv}} + f_z \frac{w}{2\sqrt{uw}},$$

$$F_v = f_x \frac{\partial x}{\partial v} + f_y \frac{\partial y}{\partial v} + f_z \frac{\partial z}{\partial v} = f_x \frac{w}{2\sqrt{vw}} f_y \frac{u}{2\sqrt{uv}},$$

$$F_w = f_x \frac{\partial x}{\partial w} + f_y \frac{\partial y}{\partial w} + f_z \frac{\partial z}{\partial w} = f_x \frac{v}{2\sqrt{vw}} + f_z \frac{u}{2\sqrt{uw}},$$

整理得 $uF_u + vF_v + wF_w = xf_x + yf_y + zf_z$.

例 3.4.6　设 $u = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,若 u 满足 Laplace(拉普拉斯) 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$,试求出函数 u.

解　计算得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(r) \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \frac{y^2 + z^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) \frac{y^2}{r^2} + f'(r) \frac{z^2 + x^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(r) \frac{z^2}{r^2} + f'(r) \frac{x^2 + y^2}{r^3},$$

代入到 Laplace 方程中得,

$$f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0 \text{ 或 } r^2 f''(r) + 2rf'(r) = [r^2 f'(r)]' = 0,$$

推知 $f'(r) = \frac{C}{r^2}$,进而 $f(r) = -\frac{C}{r} + C_1$,其中 C, C_1 为任意常数.

下面的例 3.4.7 ～ 例 3.4.9 为利用复合函数微分法进行偏微分方程变换的题目.

例 3.4.7　设 $x = e^u \cos\theta, y = e^u \sin\theta$,变换方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 为以 u, θ 为自变量的形式.

解　设 z 为以 x, y 为中间变量, u, θ 为自变量的函数,计算如下:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{e}^{u}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{e}^{u}\sin\theta,\frac{\partial z}{\partial \theta}=-\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{e}^{u}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{e}^{u}\cos\theta,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}&=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{e}^{u}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\mathrm{e}^{u}\sin\theta\right)\mathrm{e}^{u}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{e}^{u}\cos\theta\\&\quad+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{e}^{u}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{e}^{u}\sin\theta\right)\mathrm{e}^{u}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{e}^{u}\sin\theta\\&=\mathrm{e}^{2u}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{e}^{u}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta\right)\\&\quad+\mathrm{e}^{u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right).\end{aligned}$$

同理

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}=\mathrm{e}^{2u}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\theta-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{e}^{u}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\theta\right)-\mathrm{e}^{u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right).$$

于是$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}=\mathrm{e}^{2u}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=0$,所以原方程变换为$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}=0$.

例 3.4.8 设 $u=xy,v=\frac{x}{y}$,变换方程 $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 为以 u,v 为自变量的形式.

解 设 z 为以 u,v 为中间变量,x,y 为自变量的函数,计算如下:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}y+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{y},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}x-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}y^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}x^2-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{x^2}{y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{x^2}{y^4}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{2x}{y^3}.$$

于是 $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{2x}{y}=4x^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{2xy}\right)=0.$

所以原方程变换为$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$.

例 3.4.9 取 $u=\frac{x+y}{2},v=\frac{x-y}{2},w=z\mathrm{e}^{y}$,变换方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=z$ 为以u,v,w 为变量的形式,其中 $w=w(u,v)$.

解法一 将 z 视作由 $z=w\mathrm{e}^{-y},w=w(u,v),u=\frac{x+y}{2},v=\frac{x-y}{2}$ 复合而

成的以 x,y 为自变量的函数，计算如下：

$$z_x = \frac{1}{2}e^{-y}(w_u + w_v),\quad z_y = \frac{1}{2}e^{-y}(w_u - w_v) - we^{-y},$$

$$z_{xx} = \frac{1}{4}e^{-y}(w_{uu} + 2w_{uv} + w_{vv}),\quad z_{xy} = -\frac{1}{2}e^{-y}(w_u + w_v) + \frac{1}{4}e^{-y}(w_{uu} - w_{vv}),$$

于是 $z = z_{xx} + z_{xy} + z_x = \frac{1}{4}e^{-y}(2w_{uu} + 2w_{uv})$，又 $z = we^{-y}$，

故原方程变换为 $w_{uu} + w_{uv} = 2w$.

解法二　将 w 视作由 $w = ze^y$，$z = z(x,y)$，$x = u + v$，$y = u - v$ 复合而成的以 u,v 为自变量的函数，计算如下：

$$w_u = e^y(z_x + z_y) + ze^y = e^y(z_x + z_y) + w,$$

$$w_v = e^y(z_x - z_y) - ze^y = e^y(z_x - z_y) - w,$$

于是 $w_u + w_v = 2e^y z_x$，

$$w_{uu} + w_{uv} = 2e^y(z_{xx} + z_{xy}) + 2e^y z_x = 2e^y(z_{xx} + z_{xy} + z_x),$$

注意到 $z_{xx} + z_{xy} + z_x = z$，故 $2e^y(z_{xx} + z_{xy} + z_x) = 2e^y z = 2w$，

故原方程变换为 $w_{uu} + w_{uv} = 2w$.

3.4.3　隐函数(组)微分法

隐函数(组)微分法关键在于确定方程(组)中所出现变量之间隐含的函数(组)关系，然后通过复合函数微分法建立所求偏导数的方程(组)，并解之.

例 3.4.10　已知 $z = z(x,y)$ 由方程 $z - xz^2 + yz^3 = 1$ 确定，求 $dz\big|_{(0,0)}$ 和 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)}$.

解　对方程 $z - xz^2 + yz^3 = 1$ 两边求关于 x,y 的偏导数，并注意 $z = z(x,y)$，有

$$\frac{\partial z}{\partial x} - z^2 - 2xz\frac{\partial z}{\partial x} + 3yz^2\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} - 2xz\frac{\partial z}{\partial y} + z^3 + 3yz^2\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

当 $x = 0, y = 0$ 时，$z = 1$，代入上式求得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 1$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)} = -1$，

$$\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(0,0)}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(0,0)}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y.$$

(或对 $z-xz^2+yz^3=1$ 两边求关于 x,y 的全微分

$$\mathrm{d}z-z^2\mathrm{d}x-2xz\mathrm{d}z+z^3\mathrm{d}y+3yz^2\mathrm{d}z=0$$

当 $x=0,y=0,z=1$ 代入上式求得 $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$)

再对方程$\frac{\partial z}{\partial x}-z^2-2xz\frac{\partial z}{\partial x}+3yz^2\frac{\partial z}{\partial x}=0$ 两边求关于 y 的偏导数,有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}-2x\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-2xz\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+6yz\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+3yz^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

将 $x=0,y=0,z=1,\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=1,\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=-1$ 代入上式求得$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}=-5.$

例 3.4.11 若函数组 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ 的所有偏导数在点 $P(u_0,v_0)$ 的邻域连续,且 $x_0=x(u_0,v_0),y=y(u_0,v_0),\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|_P\neq 0$,求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解法一 由条件知,函数组 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ 在点 $P(u_0,v_0)$ 的邻域确定了反函数组 $u=u(x,y),v=v(x,y)$,则有$\begin{cases}x=x[u(x,y),v(x,y)]\\ y=y[u(x,y),v(x,y)]\end{cases}$,

求关于 x 的偏导数得,

$$\begin{cases}1=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ 0=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases},\quad \text{解得}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}.$$

求关于 y 的偏导数得,

$$\begin{cases}0=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\ 1=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases},\quad \text{解得}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}.$$

解法二 对$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$的两个函数求全微分得$\begin{cases}\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\\ \mathrm{d}y=\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\end{cases}$,解得

$$\mathrm{d}u=\frac{\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}x-\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}y}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},\mathrm{d}v=\frac{-\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}x+\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}y}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},$$

由此求得

$$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}.$$

进一步还有

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1.$$

例 3.4.12　设函数 $u=u(x,y)$ 由方程 $u=f(x,y,z,t)$，$g(y,z,t)=0$，$h(z,t)=0$ 确定，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

解法一　函数组$\begin{cases}g(y,z,t)=0\\ h(z,t)=0\end{cases}$确定了 $z=z(y)$，$t=t(y)$ 隐函数组，对函数组求关于 y 的偏导数得$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=0\\ \dfrac{\partial h}{\partial z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\dfrac{\partial h}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=0\end{cases}$，求得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}}{\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}},\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=\frac{\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}}{\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}}.$$

于是，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}}{\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}}=\frac{\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(y,z,t)}}{\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}}.$$

解法二　对函数组$\begin{cases}u=f(x,y,z,t)\\ g(y,z,t)=0\\ h(z,t)=0\end{cases}$求全微分得，

$$\begin{cases}\mathrm{d}u=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z+f_t\mathrm{d}t\\ g_y\mathrm{d}y+g_z\mathrm{d}z+g_t\mathrm{d}t=0\\ h_z\mathrm{d}z+h_t\mathrm{d}t=0\end{cases},$$

由后两个方程解出 $\mathrm{d}z$，$\mathrm{d}t$，代入到第一个方程中整理得到结果.

思考题 3.4

1. 设 $x = uv, y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), x^2 + y^2 \neq 0$,变换方程 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$ 为以 u,v 为自变量的形式.

2. 设 $x = \frac{u}{u^2 + v^2}, y = \frac{v}{u^2 + v^2}$,变换方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 为以 u,v 为自变量的形式.

3. 设 $x = r\sin\theta, y = r\cos\theta, r > 0$,变换方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 为以 r,θ 为自变量的形式.

4. 设 $u = x, v = x^2 + y^2, y \neq 0$,变换方程 $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 为以 u,v 为自变量的形式.

5. 取 $x = u, y = \frac{u}{1 + uv}, z = \frac{u}{1 + uw}, u \neq 0$,变换方程 $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$ 为以 u,v,w 为变量的形式,其中 $w = w(u,v)$.

6. 已知 $z = z(x,y)$ 由方程$\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y}$ 确定,求 $\mathrm{d}z$.

7. 求方程组$\begin{cases} u^3 + xv = y \\ v^3 + yu = x \end{cases}$所确定隐函数 $u = u(x,y), v = v(x,y)$ 的偏导数.

第 4 章　函数的可积性

本章内容分五节介绍.前两节是定积分理论,包括不定积分的计算方法、定积分的计算方法以及积分不等式、等式证明问题;后三节是多元函数积分理论,包括重积分、曲线积分和曲面积分.

4.1　不定积分与定积分的计算

4.1.1　不定积分的计算方法

不定积分是求给定函数的原函数问题,是为定积分的计算服务的.不定积分需要微分理论和定积分理论的支撑,我们可以把不定积分看作是微分与定积分的衔接和交叉部分,这是因为不定积分的理论基础是原函数的结构和原函数的存在性.

原函数的存在性属于定积分理论(定义在区间 I 上的连续函数 $f(x)$ 存在原函数,用定积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 就可以表示 $f(x)$ 的一个原函数),原函数的结构问题属于微分理论,(如果 $F(x)$、$G(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的任意两个原函数,那么 $F(x)-G(x)=C$(常数),这是因为$[F(x)-G(x)]'=0, x\in I$).结合上述两个重要结论,即可推导出牛顿-莱布尼兹公式,即

若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,$F(x)$ 为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

事实上,令 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$,则对 $\forall x\in[a,b]$,有 $F'(x)=\Phi'(x)=f(x)$.从而存在常数 C,使 $\Phi(x)=F(x)+C$,将 $x=a$ 代入得,$\Phi(a)=F(a)+C$,$C=-F(a)$,将 $x=b$ 代入得,$\Phi(b)=F(b)-F(a)$,即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

不定积分的计算方法是依赖于求导法则来获得的,例如分部积分法对应于函

数乘积的求导法则，换元积分法对应于复合函数求导法则等等.

我们常说“积分无定法”，但有总体的原则，即“公式为基础，变形是关键”，公式指的是常见函数的积分公式，变形是指将被积函数向能利用积分公式的形状转化，变形要坚持“化繁为简，化高（次）为低，化整为零，化无（理）为有”的指导思想.

下面的三个例子是常见的，旨在回顾不定积分的常用计算方法.

例 4.1.1 求$\int \sec x \mathrm{d}x$.

解法一 令$u=\tan\frac{x}{2}$，则$\sec x=\frac{1}{\cos x}=\frac{1+u^2}{1-u^2}$，$x=2\arctan u$，$\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$，

于是
$$\int \sec x \mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=2\int\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}=\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$
$$=\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C=\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C.$$

解法二
$$\int \sec x \mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\cos x\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{1-\sin^2 x}\overset{u=\sin x}{=}\int\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C.$$

解法三
$$\int \sec x \mathrm{d}x=\int\frac{\sec x(\sec x+\tan x)\mathrm{d}x}{\sec x+\tan x}=\int\frac{\mathrm{d}(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}$$
$$=\ln|\sec x+\tan x|+C.$$

例 4.1.2 求(1)$\int \sec^3 x\mathrm{d}x$；(2)$\int \sec^4 x\mathrm{d}x$.

解 (1)
$$\int \sec^3 x\mathrm{d}x=\int \sec x\mathrm{d}\tan x=\sec x\tan x-\int \tan^2 x\sec x\mathrm{d}x$$
$$=\sec x\tan x-\int(\sec^2 x-1)\sec x\mathrm{d}x$$
$$=\sec x\tan x-\int \sec^3 x\mathrm{d}x+\int \sec x\mathrm{d}x,$$

于是，
$$\int \sec^3 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C.$$

(2)
$$\int \sec^4 x\mathrm{d}x=\int \sec^2 x\mathrm{d}\tan x=\int(1+\tan^2 x)\mathrm{d}\tan x=\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}+C.$$

下面的例子体现了无理函数不定积分的常用代换方法.

例 4.1.3　求$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}(0<x<1)$.

解法一　三角代换 $x=\sin t$ 或 $x=\cos t$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} \overset{x=\sin t}{\underset{t\in(0,\frac{\pi}{2})}{=}} \int \csc t\mathrm{d}t = \ln|\csc t-\cot t|+C=\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C.$$

解法二　倒代换 $x=\frac{1}{t}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}=-\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} \overset{x=\frac{1}{t}}{\underset{t>1}{=}} -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$=-\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|+C=-\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C.$$

解法三　被积函数化为关于 $x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 的有理函数形式，作代换 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \overset{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t}{\underset{x=\frac{1-t^2}{1+t^2}}{=}} \int \frac{2\mathrm{d}t}{t^2-1}=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+C.$$

解法四　被积函数化为关于 $x,\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的有理函数形式，作欧拉代换

当 $a>0$ 时，令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x$，

当 $c>0$ 时，令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$，

当 ax^2+bx+c 有两个不同实根 α,β 时，令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$.

设 $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{(1-x)(1+x)}=t(1+x)$，解得 $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，

$\mathrm{d}x=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$，

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{2t}{1+t^2}\text{，于是}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}=-2\int\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+C.$$

4.1.2 定积分的计算

定积分的计算有着一定的数值计算的特点，因为毕竟求定积分求的是一个数值，而不是在求函数.

1. 利用对称性简化定积分

利用对称性计算定积分，可以减少计算量，其理论基础是下面这个例子.

例 4.1.4 设 $f(x)$ 为连续函数，则有

(1) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$；

特别地

(3)
$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^a f(-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x;$$

(4)
$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f\text{ 为偶函数}\\ 0, & f\text{ 为奇函数}\end{cases}.$$

请读者自证之.

例 4.1.5 利用例 4.1.4 之结论计算下列积分.

(1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x$； (2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\sin x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^\pi\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$； (4) $\int_{-1}^1\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{\arctan^2 x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$.

解 (1) 由例 4.1.4(3) 知，

$$\text{原积分}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\left(\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \pi\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(2) 由例 4.1.4(3) 知，

$$原积分 = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = 2.$$

(3) 由例 4.1.4(2) 知，

$$原积分 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}+\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

(4) 注意到 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是$[-1,1]$上的奇函数，注意到$\dfrac{\arctan^2 x}{1+x^2}$ 是$[-1,1]$上的偶函数，由例 4.1.4(4) 知，

$$原积分 = 2\int_0^1\frac{\arctan^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \arctan^2 x\mathrm{d}\arctan x = \frac{2}{3}\arctan^3 x\Big|_0^1 = \frac{\pi^3}{96}.$$

2. 利用换元积分法与分部积分法

例 4.1.6　求 $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解法一　令 $x=\tan t$，则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)+\ln(1+\tan(\frac{\pi}{4}-t))\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln[(1+\tan t)(1+\tan(\frac{\pi}{4}-t))]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln[(1+\tan t)(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t})]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

解法二　令 $x=\tan t$，则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\frac{\cos t+\sin t}{\cos t})\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\frac{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+t)}{\cos t})\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(\frac{\pi}{4}+t)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\mathrm{d}t,$$

因$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(\frac{\pi}{4}+t)\mathrm{d}t\overset{t=\frac{\pi}{4}-u}{=}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos u\mathrm{d}u$，故$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln2\mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}\ln2$.

解法三 令$x=\frac{1-t}{1+t}$，则

$$I=\int_0^1\frac{\ln\frac{2}{1+t}}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\ln2}{1+t^2}\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\ln2}{1+t^2}\mathrm{d}t-I,$$

进而$I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}\ln2$.

例 4.1.7 求$I(a)=\int_1^2 a^{\ln x}\mathrm{d}x(a>0)$.

解法一 当$a=\frac{1}{\mathrm{e}}$时，$I(\frac{1}{\mathrm{e}})=\int_1^2\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\ln x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln2$.

当$a\neq\frac{1}{\mathrm{e}}$时，$I(a)=\int_1^2 a^{\ln x}\mathrm{d}x=xa^{\ln x}\Big|_1^2-\int_1^2 x\mathrm{d}a^{\ln x}$

$$=2a^{\ln2}-1-\ln a\int_1^2 a^{\ln x}\mathrm{d}x=2a^{\ln2}-1-\ln aI(a),$$

整理得$I(a)=\frac{2a^{\ln2}-1}{1+\ln a}$. 于是，$I(a)=\begin{cases}\frac{2a^{\ln2}-1}{1+\ln a}, & a>0,a\neq\frac{1}{\mathrm{e}}\\ \ln2, & a=\frac{1}{\mathrm{e}}\end{cases}$.

解法二 当$a\neq\frac{1}{\mathrm{e}}$时，用换元方法：

$$I(a)=\int_1^2 a^{\ln x}\mathrm{d}x\overset{\ln x=t}{=}\int_0^{\ln2}a^t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\int_0^{\ln2}(a\mathrm{e})^t\mathrm{d}t=\frac{(a\mathrm{e})^t}{\ln a\mathrm{e}}\Bigg|_0^{\ln2}=\frac{2a^{\ln2}-1}{1+\ln a}.$$

当$a=\frac{1}{\mathrm{e}}$时，对于$\forall a>0$，$f(x,a)=a^{\ln x}$在$[1,2]\times[\frac{a}{2},2a]$上连续，从而$I(a)$对于$\forall a>0$连续.

在$a=\frac{1}{\mathrm{e}}$处，因为$I(a)$在$a=\frac{1}{\mathrm{e}}$处连续，从而

$$I(\frac{1}{\mathrm{e}})=\lim_{a\to\frac{1}{\mathrm{e}}}I(a)=\lim_{a\to\frac{1}{\mathrm{e}}}\frac{2a^{\ln2}-1}{1+\ln a}=\lim_{a\to\frac{1}{\mathrm{e}}}\frac{(2\ln2)a^{\ln2-1}}{\frac{1}{a}}=\lim_{a\to\frac{1}{\mathrm{e}}}(2\ln2)a^{\ln2}=\ln2.$$

例 4.1.8 计算$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cos nx\mathrm{d}x$.

解　$I_n = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{d}\sin nx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin nx \sin x \mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x[\cos(n+1)x - \cos(n-1)x]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}I_{n-1} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\cos(n+1)x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}[I_{n-1} - I_n + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\sin nx \sin x\mathrm{d}x]$$

$$= \frac{1}{2}I_{n-1} = \frac{1}{2^2}I_{n-2} = \cdots = \frac{1}{2^n}I_0 = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

3. 利用含参量积分的分析性质

例 4.1.9　利用含参量积分的分析性质再求例 4.1.6：$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解法一　累次积分顺序的可交换性

注意到$\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+yx)}\mathrm{d}y$，而 $f(x,y) = \frac{x}{(1+x^2)(1+yx)}$ 在$[0,1]\times[0,1]$连续，于是

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+yx)}\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+yx)}\mathrm{d}x$$

其中
$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+yx)}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\left(\frac{y+x}{1+x^2} - \frac{y}{1+yx}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{1+y^2}\left(\int_0^1 \frac{y}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{y}{1+yx}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{1+y^2}\left(\frac{\pi}{4}y + \frac{1}{2}\ln 2 - \ln(1+y)\right).$$

于是$I = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\left(\frac{\pi}{4}y + \frac{1}{2}\ln 2 - \ln(1+y)\right)\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I$，故 $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

解法二　微分运算与积分运算的可交换性

令 $I(y) = \int_0^1 \frac{\ln(1+yx)}{1+x^2}\mathrm{d}x$，

$f(x,y) = \frac{\ln(1+yx)}{1+x^2}$ 及 $f'_y(x,y) = \frac{x}{(1+x^2)(1+yx)}$ 都在$[0,1]\times[0,1]$连

续，故

$$I'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^1\frac{\ln(1+yx)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+yx)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{1+y^2}\left(\frac{\pi}{4}y+\frac{1}{2}\ln 2-\ln(1+y)\right),$$

因为 $I(0)=0, I(1)=I$，故 $I=I(1)-I(0)=\int_0^1 I'(y)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}\ln 2-I, I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

对于含参变量反常积分也可以考虑上述两种不同做法.

例 4.1.10 计算 $\varphi(r)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos rx\,\mathrm{d}x(-\infty<r<+\infty)$（利用 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$）.

容易验证

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos rx\,\mathrm{d}x \text{ 及 } \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{-x^2}\cos rx\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}-x\mathrm{e}^{-x^2}\sin rx\,\mathrm{d}x$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，并且被积函数 $\mathrm{e}^{-x^2}\cos rx\,\mathrm{d}x$，$-x\mathrm{e}^{-x^2}\sin rx$ 在 $(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续.

解法一 $\varphi'(r)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos rx\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}-x\mathrm{e}^{-x^2}\sin rx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin rx\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2}$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\sin rx\Big|_0^{+\infty}-\frac{r}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos rx\,\mathrm{d}x=-\frac{r}{2}\varphi(r).$$

即 $\varphi'(r)+\frac{r}{2}\varphi(r)=0$，推得 $(\mathrm{e}^{\frac{r^2}{4}}\varphi(r))'=0$，$\mathrm{e}^{\frac{r^2}{4}}\varphi(r)=C$，$\varphi(r)=C\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4}}$.

又 $C=\varphi(0)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，故 $\varphi(r)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4}}$.

解法二 $\varphi(r)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos rx\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}(\cos rx-\cos 0x)\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos 0x\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^r-x\mathrm{e}^{-x^2}\sin tx\,\mathrm{d}t+\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\int_0^r\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}-x\mathrm{e}^{-x^2}\sin tx\,\mathrm{d}x+\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$=\int_0^r-\frac{t}{2}\varphi(t)\mathrm{d}t+\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

即 $\varphi(r)=\int_0^r -\frac{t}{2}\varphi(t)\mathrm{d}t+\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，对 r 求导得 $\varphi'(r)=-\frac{r}{2}\varphi(r)$，以下同方法一.

4.1.3　定积分概念的应用

例 4.1.11　用定积分和式极限定义求 $\int_a^b x^3\mathrm{d}x\,(b>a>0)$.

因为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$，定积分作为黎曼和极限值与分法 T 及介点 ξ_k 的取法无关，所以在可积的前提下，只要不影响细度 $\|T\|\to 0$，可以用与被积函数相适应的特殊介点法或特殊分割法来简化黎曼和的计算，进而求得极限.

解法一　（特殊介点法）　对 $[a,b]$ 的任意分法 T，特取介点

$$\xi_k=\left(\frac{x_k^3+x_k^2x_{k-1}+x_kx_{k-1}^2+x_{k-1}^3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\ (k=1,2,\cdots,n),$$

则

$$x_{k-1}\leqslant\left(\frac{x_k^3+x_k^2x_{k-1}+x_kx_{k-1}^2+x_{k-1}^3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\leqslant x_k,$$

$$\begin{aligned}\int_a^b x^3\mathrm{d}x&=\lim_{\|T\|\to 0}\frac{1}{4}\sum_{k=1}^n(x_k^3+x_k^2x_{k-1}+x_kx_{k-1}^2+x_{k-1}^3)(x_k-x_{k-1})\\&=\lim_{\|T\|\to 0}\frac{1}{4}\sum_{k=1}^n(x_k^4-x_{k-1}^4)=\frac{b^4-a^4}{4}.\end{aligned}$$

解法二　（特殊分割法）　将 $[a,b]\,n$ 等分，取 $\xi_k=x_k\,(k=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\begin{aligned}\int_a^b x^3\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left[a+\frac{k(b-a)}{n}\right]^3\frac{b-a}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n\left[a^3+3a^2\frac{k(b-a)}{n}+3a\left(\frac{k(b-a)}{n}\right)^2+\left(\frac{k(b-a)}{n}\right)^3\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left[a^3n+\frac{3a^2(b-a)}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right.\\&\qquad\left.+\frac{3a(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{(b-a)^3}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]\\&=\frac{b-a}{4}[4a^3+6a^2(b-a)+4a(b-a)^2+(b-a)^3]=\frac{b^4-a^4}{4}.\end{aligned}$$

注　更一般地，采用特殊介点法求 $\int_a^b x^m\mathrm{d}x\,(m\geqslant 1,b>a>0)$，为此研究 $\int_a^b x^m\mathrm{d}x=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^n\xi_k^m\Delta x_k$. 其思路是

$F(x)=\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ 为被积函数 x^m 的原函数，根据 Lagrange 中值定理有，

$$\frac{x_k^{m+1}}{m+1}-\frac{x_{k-1}^{m+1}}{m+1}=F(x_k)-F(x_{k+1})=\xi_k^m(x_k-x_{k-1}),$$

计算得
$$\xi_k=\left(\frac{x_k^m+x_k^{m-1}x_{k-1}+\cdots+x_{k-1}^m}{m+1}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

因
$$x_{k-1}\leqslant\left(\frac{x_k^m+x_k^{m-1}x_{k-1}+\cdots+x_{k-1}^m}{m+1}\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant x_k,(k=1,2,\cdots,n)$$

故可取之为介点，则有

$$\int_a^b x^m\mathrm{d}x=\lim_{\|T\|\to0}\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^n(x_k^m+x_k^{m-1}x_{k-1}+\cdots+x_{k-1}^m)(x_k-x_{k-1})$$
$$=\lim_{\|T\|\to0}\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^n(x_k^{m+1}-x_{k-1}^{m+1})=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}.$$

将上述特殊介点法加以理论化，就得到下面弱条件下的牛顿-莱布尼兹公式.

例 4.1.12 （弱条件下的牛顿-莱布尼兹公式） 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且存在 $F(x)$，使得 $F'(x)=f(x)$，$\forall x\in(a,b)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

证明 对 $[a,b]$ 进行分割，设任意分法为 $T:a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$.

因为在每个区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上，$F(x)$ 满足 Lagrange 中值定理，

故分别存在 $\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$，使得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=f(\eta_i)\Delta x_i,$$

从而
$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n[F(x_i)-F(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i,$$

于是
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i=F(b)-F(a).$$

例 4.1.13 利用定积分求和式极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

解法一（用定积分定义）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\,\frac{1}{n}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln2.$$

解法二（利用已知结果） 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)=c$（欧拉常

数),故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln 2n-\left(1+\frac{1}{2}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\ln 2n-\ln n\right)=\ln 2.$$

例 4.1.14　若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格单调、连续,其反函数是 $x=f^{-1}(y)$, $\alpha=f(a)$, $\beta=f(b)$,则 $\int_\alpha^\beta f^{-1}(y)\mathrm{d}y=b\beta-a\alpha-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证明　不妨设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格增加,则 $x=f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 也严格增加. 将 $[a,b]$ 等分成 n 个小区间 $[x_{k-1},x_k]$,设 $h=\frac{b-a}{n}$,则 $x_k=a+kh$, $k=0,1,\cdots,n$. 对应的,$[\alpha,\beta]$ 也被分割成 n 个小区间 $[y_{k-1},y_k]$,其中 $y_k=f(x_k)$, $y_0=\alpha$, $y_n=\beta$.

由连续性可知,当 $n\to\infty$ 时,$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}\to 0$, $\Delta y_k=y_k-y_{k-1}\to 0$, $k=1,\cdots,n$. 于是,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f^{-1}(y)\mathrm{d}y+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f^{-1}(y_k)\Delta y_k+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n[f^{-1}(y_k)\Delta y_k+f(x_k)\Delta x_k]\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n[x_k(y_k-y_{k-1})+y_k\Delta x_k]\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n[(a+kh)(y_k-y_{k-1})+y_kh]\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n[(a+(k+1)h)y_k-(a+kh)y_{k-1}]\\&=\lim_{n\to\infty}[(a+(n+1)h)y_n-(a+h)y_0]=b\beta-a\alpha,\end{aligned}$$

结论得证.

注　如果将例 4.1.14 中的条件"函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格单调、连续"加强为"函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格单调、可微",则由定积分的分部积分法及换元积分法得,

$$\int_\alpha^\beta f^{-1}(y)\mathrm{d}y=yf^{-1}(y)\Big|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta y\,\mathrm{d}f^{-1}(y)\overset{x=f^{-1}(y)}{=}b\beta-a\alpha-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 4.1.15 设函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 在$[a,b]$连续，任意分法 T：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b.$$

任取 $\xi_k,\theta_k \in [x_{k-1},x_k]$，$k = 1,2,\cdots,n$，证明：

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\psi(\theta_k)\Delta x_k = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x.$$

证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\psi(\theta_k)\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\psi(\xi_k)\Delta x_k + \sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)[\psi(\theta_k) - \psi(\xi_k)]\Delta x_k$，

其中 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\psi(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x$. 以下只需证明

$\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)[\psi(\theta_k) - \psi(\xi_k)]\Delta x_k = 0$.

因为 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$连续，从而 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$有界，即 $\exists M > 0$，$\forall x \in [a,b]$，$|\varphi(x)| \leqslant M$. 设 $\psi(x)$ 在$[x_{k-1},x_k]$的振幅为 ω_k，则

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)[\psi(\theta_k) - \psi(\xi_k)]\Delta x_k\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n}|\varphi(\xi_k)|\,|\psi(\theta_k) - \psi(\xi_k)|\,\Delta x_k \\ &\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k.\end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k = 0$ 推知 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)[\psi(\theta_k) - \psi(\xi_k)]\Delta x_k = 0$.

思考题 4.1

1. 求$\int \csc x\mathrm{d}x$ 和$\int \sec^5 x\mathrm{d}x$.

2. 仿照例 4.1.11 用定积分和式极限定义求$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^m}(m \geqslant 2, b > a > 0)$.

3. 利用例 4.1.4 之结论计算下列积分：

(1)$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$；　　(2)$\int_0^{a}\frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{a-x}}\mathrm{d}x$.

4. 设函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 在$[a,b]$连续，任意分法 T：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b.$$

任取 $\xi_k,\theta_k \in [x_{k-1},x_k]$，$k = 1,2,\cdots,n$，证明：

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\varphi^2(\xi_k)+\psi^2(\theta_k)}\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}\mathrm{d}x.$$

4.2　积分不等式与积分等式

在本小节，我们主要探讨关于定积分不等式和等式的证明问题.

4.2.1　积分不等式的证法

例 4.2.1　设函数 $f(x)$ 在$[0,b]$连续且单调增加，则$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{b}{2}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

证法一　令 $F(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[0,b]$，

则
$$F(b)=\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x-\frac{b}{2}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x, F(0)=0.$$

由 $f(x)$ 在$[0,b]$单调增加知，$F'(x)=\frac{1}{2}\int_0^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t\geqslant 0$，即 $F(x)$ 在$[0,b]$单调增加，从而 $F(b)\geqslant F(0)$，即$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{b}{2}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

证法二　$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{b}{2}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$ 等价于
$$\int_0^b\left(x-\frac{b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{b}{2}}\left(x-\frac{b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{b}{2}}^b\left(x-\frac{b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$
由积分第一中值定理知，$\exists\xi_1\in\left[0,\frac{b}{2}\right]$，$\xi_2\in\left[\frac{b}{2},b\right]$，使得
$$\int_0^{\frac{b}{2}}\left(x-\frac{b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=f(\xi_1)\int_0^{\frac{b}{2}}\left(x-\frac{b}{2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{b^2}{8}f(\xi_1),$$
$$\int_{\frac{b}{2}}^b\left(x-\frac{b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=f(\xi_2)\int_{\frac{b}{2}}^b\left(x-\frac{b}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{b^2}{8}f(\xi_2),$$
于是$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x-\frac{b}{2}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b^2}{8}[f(\xi_2)-f(\xi_1)]\geqslant 0$.

证法三　根据条件 $f(x)$ 在$[0,b]$单调及积分第二中值定理知，$\exists\xi\in[0,b]$，使得
$$\int_0^b\left(x-\frac{b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=f(0)\int_0^\xi\left(x-\frac{b}{2}\right)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b\left(x-\frac{b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\xi(b-\xi)[f(b)-f(0)]\geqslant 0.$$

证法四 由 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 单调增加知，

$$(x-\frac{b}{2})[f(x)-f(\frac{b}{2})]\geqslant 0,\quad \int_0^b(x-\frac{b}{2})[f(x)-f(\frac{b}{2})]\geqslant 0,$$

$$\int_0^b(x-\frac{b}{2})f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^b(x-\frac{b}{2})f(\frac{b}{2})\mathrm{d}x=f(\frac{b}{2})\int_0^b(x-\frac{b}{2})\mathrm{d}x=0.$$

证法五 作积分变换：

$$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x\overset{u=(\frac{x}{b})^2}{=}\frac{b^2}{2}\int_0^1 f(b\sqrt{u})\mathrm{d}u\geqslant\frac{b^2}{2}\int_0^1 f(bu)\mathrm{d}u\overset{x=bu}{=}\frac{b}{2}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注 在例 4.2.1 的证法四和证法五中不需要连续性条件，该题更一般的结果是：

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调增加，则 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

读者可以考虑用多种方法解决之，例如用方法四证明这一命题，这只需注意到

$$(x-\frac{a+b}{2})[f(x)-f(\frac{a+b}{2})]\geqslant 0 \text{ 和} \int_a^b(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x=0.$$

例 4.2.2 若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的增函数，则 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $[a,b]$ 上的凸函数.

证法一 $\forall x_1,x_2,x_3\in[a,b]$ 且 $x_1<x_2<x_3$，有

$$\frac{G(x_2)-G(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)\mathrm{d}t\leqslant f(x_2)$$

$$\leqslant\frac{1}{x_3-x_2}\int_{x_2}^{x_3}f(t)\mathrm{d}t=\frac{G(x_3)-G(x_2)}{x_3-x_2},$$

故 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $[a,b]$ 上的凸函数.

证法二 对 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x_1,x_2\in[a,b]$，不妨设 $x_1<x_2$，

$$G[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]=\int_a^{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}f(t)\mathrm{d}t=\int_a^{x_1}f(t)\mathrm{d}t+\int_{x_1}^{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\lambda G(x_1)+(1-\lambda)G(x_2)=\lambda\int_a^{x_1}f(t)\mathrm{d}t+(1-\lambda)\int_a^{x_2}f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^{x_1} f(t)\mathrm{d}t + (1-\lambda)\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t,$$

而
$$\int_{x_1}^{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2} f(t)\mathrm{d}t \leqslant (1-\lambda)(x_2-x_1)f(x_1) \leqslant (1-\lambda)\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t,$$

故 $G[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] \leqslant \lambda G(x_1)+(1-\lambda)G(x_2)$，即 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $[a,b]$ 上的凸函数.

该例条件增强为"$f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续增函数"的证法是：

$G'(x)=f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的增函数，故 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $[a,b]$ 上的凸函数.

例 4.2.3　若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的增函数，则 $F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $(a,b]$ 上的增函数.

证法一　$\forall x_1,x_2\in(a,b]$ 且 $x_1<x_2$，注意到 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $[a,b]$ 上的凸函数，就有

$$F(x_1)=\frac{1}{x_1-a}\int_a^{x_1} f(t)\mathrm{d}t=\frac{G(x_1)}{x_1-a}=\frac{G(x_1)-G(a)}{x_1-a}$$
$$\leqslant \frac{G(x_2)-G(a)}{x_2-a}=\frac{G(x_2)}{x_2-a}=\frac{1}{x_2-a}\int_a^{x_2} f(t)\mathrm{d}t=F(x_2),$$

故 $F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $(a,b]$ 上的增函数.

证法二
$$F(x_1)-F(x_2)=\frac{1}{x_1-a}\int_a^{x_1} f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{x_2-a}\int_a^{x_2} f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{x_1-a}\int_a^{x_1} f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{x_2-a}\left(\int_a^{x_1} f(t)\mathrm{d}t+\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t\right)$$
$$=\frac{x_2-x_1}{(x_1-a)(x_2-a)}\int_a^{x_1} f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{x_2-a}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{x_2-a}-\frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{x_2-a}=0.$$

该例条件增强为"$f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续增函数"的证法是：

$$F'(x)=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{(x-a)^2}=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}\geqslant 0,\text{其中 } \xi\in[a,x],$$

故 $F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为$(a,b]$上的增函数.

例 4.2.4　(强条件下的 Hadamard(哈德马)不等式)

若 $f(x)$ 为$[a,b]$上的可导凸函数,则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

证法一　仿照例4.2.1之证法一,对于$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}$,将$b$替换为$x$,令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)\frac{f(a)+f(x)}{2}$,$x\in[a,b]$,则

$$F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2},F(a)=0.$$

要证不等式等价于 $F(b)\leqslant F(a)$,往证 $F(x)$ 为$[a,b]$上的减函数.

因为 $f(x)$ 为$[a,b]$上的可导凸函数,故 $f'(x)$ 为$[a,b]$上的增函数,从而

$$\begin{aligned}F'(x)&=f(x)-\frac{1}{2}(f(a)+f(x))-\frac{1}{2}f'(x)(x-a)\\&=\frac{1}{2}[f(x)-f(a)]-\frac{1}{2}f'(x)(x-a)\\&=\frac{1}{2}(x-a)[f'(\xi)-f'(x)]\leqslant 0,\end{aligned}$$

故 $F(x)$ 为$[a,b]$上的减函数.

对于 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,令

$G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right)$,$x\in[a,b]$,同理可证.

证法二　因为 $f(x)$ 为$[a,b]$上的可导凸函数,故对 $\forall x\in[a,b]$,有

$$f(x)\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

以及

$$f(x)\leqslant f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

对上述两个不等式两边积分即得结论.

例 4.2.5　(弱条件下的 Hadamard 不等式)若 $f(x)$ 为$[a,b]$上的凸函数,则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

证法一　$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t$

$$=\int_0^1 f\left[\frac{1}{2}((1-t)a+tb)+\frac{1}{2}(ta+(1-t)b)\right]\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1 f((1-t)a+tb)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\int_0^1[tf(a)+(1-t)f(b)]\mathrm{d}t$$

$$=f(a)\int_0^1 t\mathrm{d}t+f(b)\int_0^1(1-t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

令 $x=ta+(1-t)b$，则$\int_0^1 f(ta+(1-t)b\mathrm{d}t=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，从而结论成立.

证法二　一方面，据定积分概念和凸函数 Jenson 不等式，有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(a+\frac{i}{n}(b-a))\,\frac{b-a}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\,\frac{1}{n}f(a+\frac{i}{n}(b-a))\geqslant\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a+\frac{i}{n}(b-a))\right)$$

$$=f\left(\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(a+\frac{i}{n}(b-a))\,\frac{b-a}{n}\right)=f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b x\mathrm{d}x\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

另一方面，令 $x=ta+(1-t)b$，解得 $t=\frac{b-x}{b-a}$，即 $\forall x\in[a,b]$，$x=\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b$，于是

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b\right)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{1}{b-a}\left(f(a)\int_a^b\frac{b-x}{b-a}\mathrm{d}x+f(b)\int_a^b\frac{x-a}{b-a}\mathrm{d}x\right)=\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

注　当 $f(x)$ 为$[a,b]$上的凸函数时，$f(x)$ 在$[a,b]$上未必连续，但仅在端点处可能有可去间断点，因此是可积的.

4.2.2 积分上限函数的分析性质

积分上限函数的分析性质有如下两个结论.

若 $f(x)$ 在$[a,b]$可积,则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$连续.

若 $f(x)$ 在$[a,b]$连续,则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$可导,且 $\Phi'(x)=f(x)$.

例 4.2.6 证明$\int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$,其中 $f(x)$ 连续.

证法一 (分部积分法)
$$\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u=u\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\Big|_0^x-\int_0^x u\mathrm{d}\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)$$
$$=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u=\int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u.$$

证法二 (微分法) 令
$$F(x)=\int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u, G(x)=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u,$$
则
$$F'(x)=\left(\int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u\right)'=\left(x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u\right)'$$
$$=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,$$
$$G'(x)=\left(\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\right)'=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,$$
故 $F(x)-G(x)=C$,又当 $x=0$ 时,可求得 $C=0$,从而 $F(x)=G(x)$.

例 4.2.7 若函数 $f(x)$ 为$[a,b]$上的非负连续函数且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,则$f(x)\equiv 0$.

证法一 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则由 $f(x)$ 的非负性知,对 $\forall x\in[a,b]$,有
$$0\leqslant\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0,$$
从而 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\equiv 0,\forall x\in[a,b]$,于是 $f(x)=F'(x)=0$.

证法二 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $\forall x\in[a,b]$,$F'(x)=f(x)\geqslant 0$,故 $F(x)$ 为$[a,b]$上的增函数.

又 $F(a)=0,F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，从而 $F(x)\equiv 0,\forall x\in[a,b]$，

于是 $f(x)=F'(x)=0$.

证法三（反证法）　假设 $\exists x_0\in[a,b]$，有 $f(x_0)>0$，则由连续函数保号性知，

$$\exists\delta>0,\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),\text{有 } f(x)>\frac{1}{2}f(x_0),$$

从而由 $f(x)$ 的非负性及定积分不等式性知，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\delta f(x_0)>0,\text{与}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0\text{ 矛盾.}$$

例 4.2.8　若 $g(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积不变号，$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明　令 $G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}G(x)=f(x)G(x)\Big|_a^b-\int_a^b G(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

注意到 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积不变号，不妨设 $f'(x)\geqslant 0$，由积分第二中值定理知，

$$\exists\xi\in(a,b),\text{使得}\int_a^b G(x)f'(x)\mathrm{d}x=G(\xi)\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=G(\xi)[f(b)-f(a)]$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x&=f(b)\int_a^b g(x)-[f(b)-f(a)]\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x\\&=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

4.2.3　定积分近似计算的误差分析

定积分近似计算的梯形法公式为：

$$S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\approx\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

下面的例子给出了梯形法公式误差估计的定量与定性分析.

例 4.2.9　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数，$\sup\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|=M$，证明：

(1) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\exists \xi \in (a,b), \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$;

(3) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}M$;

(4) 将$[a,b]$等分成n个小区间:$[x_{k-1},x_k]$,$k=1,2,\cdots,n$,其中$x_0=a$,$x_n=b$,记$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,$S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$,则有

$$|I-S_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}M;$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(I-S_n) = \frac{1}{12}(b-a)^2[f'(a)-f'(b)]$.

证明 (1)
$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)d(x-\frac{a+b}{2}) \\
&= (x-\frac{a+b}{2})f(x)\Big|_a^b - \int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f'(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f'(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{1}{2}\int_a^b f'(x)d[(x-a)(x-b)] \\
&= \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{1}{2}[(x-a)(x-b)f'(x)\Big|_a^b \\
&\quad - \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x] \\
&= \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x].
\end{aligned}$$

进一步整理得到结论(1).

(2) 根据积分第一中值定理,有

$$\exists \xi \in (a,b), 使得\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$$

代入到结论(1)中得结论(2).

(3) 由(2)及$\sup\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)| = M$直接推得.

(4) 根据结论(3),有

$$|I-S_n| = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2n}[f(x_{k-1}) + f(x_k)] \right\} \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2n}[f(x_{k-1}) + f(x_k)] \right|$$

$$\leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}M.$$

(5) 由结论(2) 知，$I - S_n = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2n}[f(x_{k-1}) + f(x_k)] \right\}$$

$$= -\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k),$$

其中 $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k), k = 1,2,\cdots,n$.

从而 $n^2(I - S_n) = -\frac{1}{12}(b-a)^2\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k)\frac{b-a}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty} n^2(I - S_n) = -\frac{1}{12}(b-a)^2 \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k)\frac{b-a}{n}$$

$$= -\frac{1}{12}(b-a)^2\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{12}(b-a)^2[f'(a) - f'(b)].$$

思考题 4.2

1. 求证：当 $f(x)$ 为$[a,b]$上的凸函数时，有$\frac{1}{2}\left(f\left(a+\frac{b-a}{4}\right)+f\left(b-\frac{b-a}{4}\right)\right)$ $\leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$.

2. (Schwarz 不等式) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在$[a,b]$上连续，证明

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

3. 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上可导，$f(0) = 0, 0 < f'(x) \leqslant 1$，证明$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$ $\geqslant \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$. (仿照例 4.2.5 之证法一)

4. 若函数 $f(x)$ 为$[a,b]$上的可积函数，$g(x)$ 为$[a,b]$上的非负可积函数，则 $\exists \xi,\eta\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = m\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + M\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$，

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = M\int_a^\eta g(x)\mathrm{d}x + m\int_\eta^b g(x)\mathrm{d}x.$$

其中 $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$，$M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

5. 若函数 $f(x)$ 为$[a,b]$上的单调函数，$g(x)$ 为$[a,b]$上的非负可积函数，则 $\exists \xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

（利用第 4 题结论证明之，通常教材中积分第二中值定理表述是：

设 $g(x)$ 为$[a,b]$上的可积函数，函数 $f(x)$ 为$[a,b]$上的单调函数，则 $\exists \xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.）$$

6. 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上具有二阶连续导数，$\sup\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|=M$，证明：

(1) $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{(x-a)^2}{2}f''(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\frac{(x-b)^2}{2}f''(x)\mathrm{d}x;$$

(2) $\exists \eta\in(a,b)$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\eta)$；

(3) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{24}M$；

(4) 将$[a,b]$等分成 n 个小区间：$[x_{k-1},x_k]$，$k=1,2,\cdots,n$，其中 $x_0=a$，$x_n=b$，记 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$S_n=\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$，则有 $|I-S_n|\leqslant\frac{(b-a)^3}{24n^2}M$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(I-S_n)=\frac{1}{24}(b-a)^2[f'(b)-f'(a)]$.

4.3 二重积分与三重积分

对于平面区域和空间区域上的重积分，计算的基本方法是化为累次积分进行

计算,这关键在于对区域的表达和变换(不妨称之为区域分析,这需要一定的空间解析能力),而变换的目的实际上是使得给定区域或被积函数在新的坐标系下表达简单,从而利于化为累次积分计算.当然,在计算过程中有时也需要考虑一定的技巧,例如积分先后次序的选择以及合理利用对称性等.

4.3.1　二重积分的计算

例 4.3.1　平面区域 D 为两个上半圆周 $x^2+y^2=2ax$, $x^2+y^2=ax$ $(y\geqslant 0, a>0)$ 围成,试分别给出 D 在直角坐标系和极坐标系下的不同表示.

解　上半圆周 $x^2+y^2=2ax$, $x^2+y^2=ax$ $(y\geqslant 0, a>0)$ 可分别化为 $y=\sqrt{2ax-x^2}$, $y=\sqrt{ax-x^2}$ 以及极坐标方程 $r=2a\cos\theta$, $r=a\cos\theta$ $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

D 有如下四种表示.

(1)D 表示为 x 型区域(见图 4-1):$D=D_1\cup D_2$,

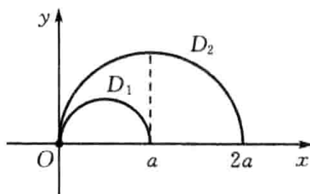


图 4-1

$$D_1: 0\leqslant x\leqslant a, \sqrt{ax-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{2ax-x^2},$$

$$D_2: a\leqslant x\leqslant 2a, 0\leqslant y\leqslant\sqrt{2ax-x^2}.$$

(2)D 表示为 y 型区域(见图 4-2):$D=D_3\cup D_4\cup D_5$,

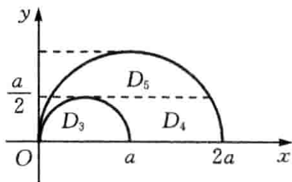


图 4-2

$D_3: 0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{2}, a - \sqrt{a^2 - y^2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - y^2},$

$D_4: 0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{2}, \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - y^2} \leqslant x \leqslant a + \sqrt{a^2 - y^2},$

$D_5: \frac{a}{2} \leqslant y \leqslant a, a - \sqrt{a^2 - y^2} \leqslant x \leqslant a + \sqrt{a^2 - y^2}.$

(3)D 表示为 r 型区域(见图 4-3):$D = D_6 \cup D_7$,

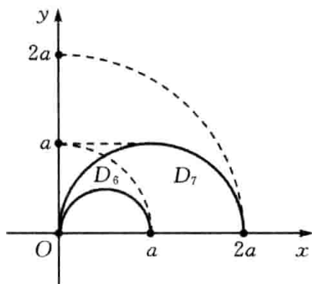


图 4-3

$D_6: 0 \leqslant r \leqslant a, \arccos\frac{r}{a} \leqslant \theta \leqslant \arccos\frac{r}{2a}, D_7: a \leqslant r \leqslant 2a, 0 \leqslant \theta \leqslant \arccos\frac{r}{2a}.$

(4)D 表示为 θ 型区域:$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, a\cos\theta \leqslant r \leqslant 2a\cos\theta.$

同一区域的不同表示使计算有了繁简的区别,甚至影响能否得到计算结果.

例 4.3.2 计算下列二重积分.

(1)$I = \iint\limits_D e^{y^2}\,dx\,dy$,其中 D 为由 $x = 0, y = 1, y = x$ 所围区域.

(2)$I = \iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy$,其中 D 为由 $x = \pi, y = \pi, y = \pi - x$ 所围区域.

(3)$I = \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{y^2 + x}$,其中 D 为由 $x = 0, y = 1, y = x$ 所围区域.

解 (1)D 表示为 y 型区域:$0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant y.$

$$I = \iint\limits_D e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y e^{y^2}\,dx = \int_0^1 y e^{y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{y^2}\,d(y^2) = \frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(e - 1).$$

(2)D 表为 x 型区域:$0 \leqslant x \leqslant \pi, \pi - x \leqslant y \leqslant \pi$.

$$I = \iint_D \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x \int_{\pi - x}^{\pi} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x = 2.$$

(3)$I = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2 + x} = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{y^2 + x} = \int_0^1 \ln(1 + \frac{1}{y})\mathrm{d}y$

$$= y\ln(1 + \frac{1}{y}) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1 + y} = 2\ln 2.$$

或 $I = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2 + x} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \frac{\mathrm{d}x}{y^2 + x} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}(\arctan \frac{1}{\sqrt{x}} - \arctan \sqrt{x})\mathrm{d}x$

$$= 2\int_0^1 (\arctan \frac{1}{t} - \arctan t)\mathrm{d}t$$

$$= 2(t\arctan \frac{1}{t} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{t}{1 + t^2}\mathrm{d}t - t\arctan t \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{t}{1 + t^2}\mathrm{d}t)$$

$$= 4\int_0^1 \frac{t}{1 + t^2}\mathrm{d}t = 2\ln 2.$$

(1)(2) 两个小题说明,当被积函数是只有一个变量的二重积分时要考虑先对另外一个变量积分,(3) 对于两种积分顺序都可以,但计算量有很大差别.

一般二重积分与三重积分的计算方法如表 4 - 1 所示。

表 4 - 1　二重积分与三重积分的计算方法

	二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	三重积分 $\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
直角坐标系下的累次积分法	① 型区域 $D: a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$, $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$ ②y 型区域 $D: c \leqslant y \leqslant d, \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$, $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$	① 投影法(选择将 V 向某个坐标面作投影,积分顺序为先一后二) $V: z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}$, $\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$ ② 截面法(选择将 V 向某个坐标轴作投影,积分顺序为先二后一) $V: (x,y) \in D_z, c \leqslant z \leqslant d$, $\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_c^d \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

续表 4-1

一般变换公式	$x=x(u,v),y=y(u,v)$, $(x,y)\in D,(u,v)\in D'$, $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left\|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$	$x=x(u,v,w),y=y(u,v,w),z=z(u,v,w)$, $(x,y,z)\in V,(u,v,w)\in V'$, $\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left\|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$
常用变换	极坐标变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ $\left\|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right\|=r$, 其中 $0\leqslant r<+\infty$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.	① 柱面坐标变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$, $\left\|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right\|=r$, 其中 $0\leqslant r<+\infty,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,-\infty<z<+\infty$. ② 球面坐标变换 $x=r\sin\varphi\cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z=r\cos\varphi$, $\left\|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right\|=r^2\sin\varphi$, 其中 $0\leqslant r<+\infty,0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

例 4.3.3 计算 $I=\iint\limits_D\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为 $x^2+y^2=1$ 与 $y=|x|$ 所围区域(见图 4-4).

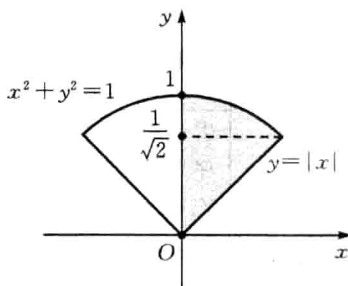


图 4-4

解法一 被积函数 $\sqrt{1-y^2}$ 只含变量 y(可视作关于 x 的偶函数),区域 D 关于 y 轴对称,设 D 在第一象限部分为 D_1,将 D_1 表为 y 型区域利于计算:

D_1 可表示为两部分:$0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\leqslant x\leqslant y$ 与 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}$,

则 $$I=2\iint_{D_1}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{d}y\int_0^y\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x+2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}y\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y+2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1(1-y^2)\mathrm{d}y=2-\sqrt{2}.$$

解法二　对 D_1 采取极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则 D_1 表为：$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 1$.

则 $$I=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1-\cos^3\theta}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta-\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3\theta}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{3}(-\cot\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\sin\theta=2-\sqrt{2}.$$

如果将 D_1 表为 x 型区域或不考虑对称性而直接将 D 表示为：$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}$，$0\leqslant r\leqslant 1$，计算积分时就会遇到麻烦. 由此可见积分次序的选择和对称性的使用将为计算带来简便，这是计算之初需要考虑的，我们需要积累这方面的经验.

例 4.3.4　计算下列二重积分.

(1) $I=\iint_D(x^2-y^2)^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\leqslant 1\}$，$p$ 为正整数.

(2) $I=\iint_D\left(\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由曲线 $\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}=1$ 及直线 $x=c, y=c$ 所围成 $(a,b,c>0)$（见图 4-5）.

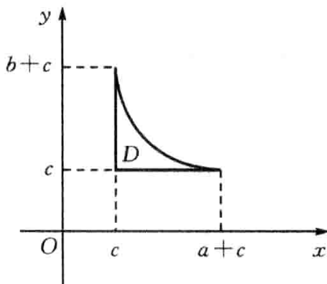


图 4-5

解 (1) 令 $u=x+y, v=x-y$,

则此时 D 表为 $-1\leqslant u\leqslant 1, -1\leqslant v\leqslant 1, J=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\dfrac{1}{\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|}=\dfrac{1}{2}$,

于是

$$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}u^{p}\,\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}v^{p}\,\mathrm{d}v=\begin{cases}0, & p\text{ 为奇数}\\ \dfrac{2}{(p+1)^{2}}, & p\text{ 为偶数}\end{cases}.$$

(2) 令 $x=c+ar\cos^{4}\theta, y=c+br\sin^{4}\theta$,

则此时 D 表为 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 1, J=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=4abr\cos^{3}\theta\sin^{3}\theta$,于是

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{1}4abr^{\frac{3}{2}}\cos^{3}\theta\sin^{3}\theta\,\mathrm{d}r=\frac{2ab}{15}.$$

以上两例说明,变换的选择依据是积分区域(的边界)或被积函数(的表达式).

例 4.3.5 计算下列二重积分:

(1) $I=\displaystyle\iint\limits_{x^{2}\leqslant y<3}\sqrt{(y-x^{2})}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(2) $I=\displaystyle\iint\limits_{D}|x-y^{2}|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D:0\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant y\leqslant 1$.

解 (1) 如图 4-6 所示,

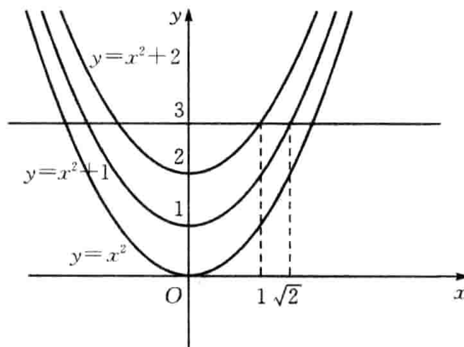


图 4-6

$$I=\iint\limits_{x^2\leqslant y<x^2+1<3}\sqrt{[y-x^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{x^2+1\leqslant y<x^2+2<3}\sqrt{[y-x^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint\limits_{x^2+2\leqslant y<3}\sqrt{[y-x^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+1\leqslant y<x^2+2<3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{x^2+2\leqslant y<<3}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+1\leqslant y<3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{x^2+2\leqslant y<3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{3}\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{3}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{4}{3}(2\sqrt{2}+1).$$

(2) 如图 4－7 所示，

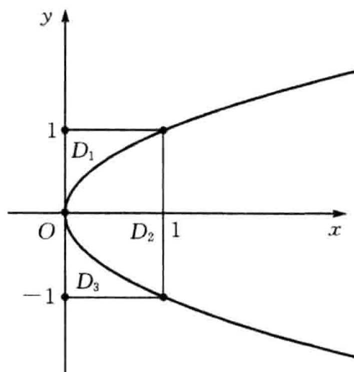


图 4－7

$$I=\iint\limits_{D_1\cup D_3}(y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{y^2}(y^2-x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{1}(x-y^2)\mathrm{d}x=\frac{11}{15}$$

当被积函数中含有“绝对值函数 | |”、“取整函数[ ]”、“符号函数 sgn” 等函数时，需要通过分割区域来化简被积函数.

4.3.2　三重积分的计算

例 4.3.6　空间闭体 V 由球面 $x^2+y^2+z^2=2a^2$ 和锥面 $x^2+y^2=z^2(z\geqslant$

0）围成，试分别给出 V 在直角坐标系、柱面坐标系和球面坐标系下的不同表示.

解 直角坐标系下，有以下两种表示.

① 投影法（选择将 V 向某个坐标面作投影）：向 xoy 坐标面投影（从两个曲面方程中消去变量 z）得投影区域为 $x^2+y^2\leqslant a^2$，任意固定其上一点 (x,y)，引平行于 z 轴的直线，求出被边界曲面截得线段端点的纵坐标，确定 z 的范围.

$$V：-a\leqslant x\leqslant a,\ -\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{a^2-x^2},$$
$$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{2a^2-x^2-y^2}.$$

② 截面法（选择将 V 向某个坐标轴作投影）：向 z 轴投影，得 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{2}a$，任意固定其上一点 z，引平行于 xoy 坐标面的平面，求出被边界曲面截得平面区域的 (x,y) 的范围.

$$V=V_1\cup V_2,\text{其中}V_1:0\leqslant z\leqslant a,x^2+y^2\leqslant z^2,$$
$$V_2:a\leqslant z\leqslant\sqrt{2}a,x^2+y^2\leqslant 2a^2-z^2.$$

柱面坐标变换下，V 表示为：$0\leqslant\theta\leqslant2\pi,0\leqslant r\leqslant a,r\leqslant z\leqslant\sqrt{2a^2-r^2}$.

球面坐标变换下，V 表示为：$0\leqslant\theta\leqslant2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4},0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}a$.

通过下面的例子，希望读者能够比较不同解法的异同，理解在对积分区域分析后，如何选择最省力的计算手法.

例 4.3.7 计算三重积分 $I=\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V 由上半球面 $x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant0)$ 和旋转抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成，如图 4－8 所示.

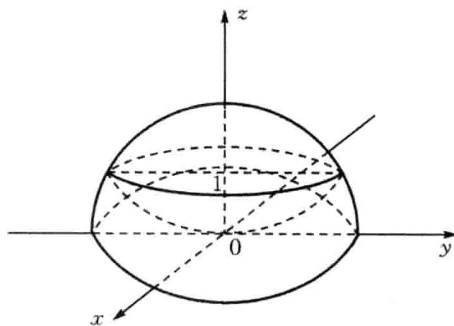


图 4－8

解法一　将 V 向 xoy 坐标面作投影，则

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 3\},\frac{1}{3}(x^2+y^2)\leqslant z\leqslant\sqrt{4-x^2+y^2},$$

于是 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 3}[(4-x^2-y^2)-\frac{1}{9}(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\frac{13}{4}\pi$.（显然最后的二重积分计算需要用到极坐标变换）.

解法二　可求得 V 在 xoy 坐标面上的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant 3$，

在柱面坐标变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$ 下 V 表示为：

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant\sqrt{3},\frac{r^2}{3}\leqslant z\leqslant\sqrt{4-r^2},$$

于是，

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}zr\,\mathrm{d}z=\frac{13}{4}\pi.$$

解法三　将 V 向 z 轴作投影，$x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant 0)$ 与 $x^2+y^2=3z$ 相交，交线为

$$z=1,x^2+y^2=3,$$

这时用 $z=1$ 将 V 分成两部分 $V=V_1\cup V_2$，其中

$$V_1:0\leqslant z\leqslant 1,D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 3z\},$$

$$V_2:1\leqslant z\leqslant 2,D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4-z^2\}$$

$$I=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 3z}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4-z^2}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 3\pi z^2\mathrm{d}z+\int_1^2\pi z(4-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{13}{4}\pi.$$

（被积函数只含变量 z，这时考虑先对 x,y 求二重积分，最后对 z 求定积分的“先二后一”截面法，加之 V 还是绕 z 轴的旋转体，这就给计算带来了极大方便）

解法四　在球面坐标变换 $x=r\sin\varphi\cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z=r\cos\varphi$ 下 $V=V_3\cup V_4$，

其中

$$V_3:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3},0\leqslant r\leqslant 2,$$

$$V_4:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\frac{\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 3\cot\varphi\csc\varphi,$$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^3\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{3\cot\varphi\csc\varphi} r^3\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}r=3\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{13\pi}{4}.$$

例 4.3.8 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为椭圆锥面 $\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 与平面 $z=c$ 所围成的空间闭体.

解 引入广义柱面坐标变换 $x=ar\cos\theta,y=br\sin\theta,z=z,|J|=abr$，则 Ω 表为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 1,cr\leqslant z\leqslant c$$

计算 $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{cr}^c(a^2r^2\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\theta+z^2)abr\mathrm{d}z$

$$=abc\left(a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r+b^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r+\frac{c^2}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^3)r\mathrm{d}r\right)$$

$$=\frac{1}{20}\pi abc(a^2+b^2+4c^2).$$

例 4.3.9 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为由 $x=0,x=1,x^2+1=\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}$ 所围成的空间闭体，如图 4－9 所示.

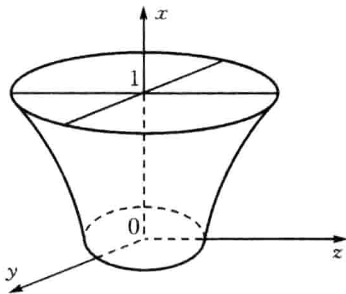


图 4－9

解法一 首先 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=I=\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，由 Ω 关于 xoz 坐标面对称，$f(x,y,z)=y$ 为 Ω 上关于 y 的奇函数，故 $\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

引入广义柱面坐标变换 $x=x,y=ar\cos\theta,z=br\sin\theta,|J|=abr$，则 $\Omega=$

$\Omega_1 \cup \Omega_2$，其中

$$\Omega_1: 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$\Omega_2: 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 1 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}, \sqrt{r^2-1} \leqslant x \leqslant 1$$

计算得 $I = \iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^1 xabr\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{\sqrt{r^2-1}}^1 xabr\,\mathrm{d}x = \dfrac{3\pi ab}{4}.$

解法二　在解法一的柱面坐标变换下，Ω 还可表为

$$0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{1+x^2}$$

计算得 $I = \iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1+x^2}} xabr\,\mathrm{d}r = \dfrac{3\pi ab}{4}.$

解法三　对 Ω 直接采用截面法表示为

$$0 \leqslant x \leqslant 1, (y,z) \in D_x = \left\{(y,z) \,\middle|\, \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leqslant 1 + x^2\right\}$$

计算得 $I = \iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1\mathrm{d}x\iint\limits_{D_x} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi ab\int_0^1 x(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3\pi ab}{4}.$

读者可以对比解法二和解法三，会发现截面区域 $D_x = \left\{(y,z) \,\middle|\, \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} \leqslant 1 + x^2\right\}$ 在广义极坐标变换 $y = ar\cos\theta, z = br\sin\theta$ 下的表示恰为 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{1+x^2}$.

例 4.3.10　求闭曲面 $S: \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + z^2\right)^2 = c^3 z$ 所围立体之体积($a,b,c > 0$).

解　注意到 $z \geqslant 0$ 及对称性，所求体积为在第一卦限部分体积的四倍.

在广义球面坐标变换 $x = ar\sin\varphi\cos\theta, y = br\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi$，$|J| = abr^2\sin\varphi$ 下，曲面 S 为：$r^3 = c^3\cos\varphi$，第一卦限部分为：

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant c\sqrt[3]{\cos\varphi}.$$

于是

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{c\sqrt[3]{\cos\varphi}} abr^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{abc^3\pi}{3}.$$

思考题 4.3

1. 在区域 $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$ 上计算下列二重积分.

$$(1)I_1=\iint_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y;\qquad (2)I_2=\iint_D \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^3+y^3+4}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 计算 $I=\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $f(u)$ 是连续函数,区域 D 由 $y=x^3,y=1,x=-1$ 围成.

3. 计算下列区域 D 的面积.

(1)D 由曲线 $\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}=1,\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}=4$ 及直线 $x=c,y=c$ 所围成($a,b,c>0$).

(2)D 由四条直线 $x+y=p,x+y=q,y=ax,y=bx(0<p<q,0<a<b)$ 所围成.

4. 计算下列三重积分.

$$(1)I=\iiint_V x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 所围成.

$$(2)I=\iiint_V (y-z)\arctan z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 由曲面 $x^2+\frac{1}{2}(y-z)^2=R^2,z=0,z=h$ 所围成.

5. 计算体积($a,b,c,h>0$):

(1) 求闭曲面 $S:(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})^2=\frac{x}{h}$ 所围立体之体积;

(2) 求闭曲面 $S:(\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}+(\frac{y}{b})^{\frac{2}{3}}+(\frac{z}{c})^{\frac{2}{3}}=1$ 所围立体之体积.

6. 设 $g(t)=\dfrac{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}(x^2+y^2)f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$,其中 $t>0$,f 是正值连续函数.证明 $g(t)$ 是 $(0,+\infty)$ 严格单调函数.

4.4 曲线积分

曲线包括平面曲线和空间曲线,而曲线积分有第一型曲线积分和第二型曲线

积分之分，无论是研究曲线自身的微分几何性质(例如切线、曲率、弧长、法平面、围成区域的面积等)，还是计算曲线上的积分，都依赖于曲线方程的表达形式. 一般来讲，当需计算给定曲线的某个几何量或其上某种类型的积分时，基于不同的表达形式就有不同的计算公式和计算方法，因此，将曲线的表达形式搞清楚，是进行与曲线相关计算的重要前提工作.

本节使用如下一些结论.

(1) 设函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线 $C: x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上连续，则第一型曲线积分 $\int_C f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$. 曲线 C 光滑是指 $\varphi'(t),\psi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$. 特别地，曲线 C 的弧长 $s=\int_C\mathrm{d}s$ $=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$.

(2) 设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有向平面光滑曲线 $C(A,B): x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha\leqslant t\leqslant\beta$, 上连续，且 α 对应起点 A, β 对应终点 B，则第二型曲线积分

$$\int_{C(A,B)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\mathrm{d}t$$

对于空间曲线也有类似结果.

针对平面闭曲线有 Green 公式.

(3)(Green 公式) 设 $P,Q,\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在有界闭区域 D 上连续，边界 ∂D 为逐段光滑的封闭曲线且取正向，则 $\oint_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ P & Q\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

特别地，区域 D 的面积 $S_D=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$.

针对空间闭曲线有 Stokes 公式.

(4)(Stokes 公式) 设函数 P,Q,R 及其偏导数在分片光滑有界双侧曲面 S 上连续，边界 ∂S 为逐段光滑的封闭曲线且其正方向与 S 所指定的正侧符合右手系，则

$$\oint_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS.$$

4.4.1 曲线积分的基本方法

例 4.4.1 将封闭曲线 $L: x^2+y^2=ax$ 表示为不同的参数方程，并计算 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$.

解 用 L_1 表示圆 L 的上半部分，由对称性知

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds = 2\int_{L_1} \sqrt{x^2+y^2}\,ds = 2\int_{L_1} \sqrt{ax}\,ds.$$

L_1 可以表示为如下三种形式.

(1) $x=x, y=\sqrt{ax-x^2}, 0\leqslant x\leqslant a$.

(2) $x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta, y=\frac{a}{2}\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

(3) $x=a\cos^2\theta, y=a\cos\theta\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$(利用极坐标 $r=a\cos\theta$).

以(3)为例，通过计算 $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{r(\theta)^2+r'^2(\theta)}\,d\theta=a\,d\theta$，进而

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds = 2\int_{L_1}\sqrt{ax}\,ds = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta = 2a^2.$$

例 4.4.2 设 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，从 x 轴正向看逆时针为正向. 计算下列问题：

(1) 求曲线 Γ 在点 $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ 的切线方程；

(2) 计算第一型曲线积分 $\oint_\Gamma (3x^2+z)\,ds$；

(3) 计算第二型曲线积分 $\oint_\Gamma y\,dx+z\,dy+x\,dz$.

解法一 将上述三个问题统一在参数方程下解决.

首先建立 $\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 的参数方程.

先求 Γ 在 xoy 坐标面的投影曲线的参数方程，为此利用所给两曲面方程消去 z 得：

$$x^2+xy+y^2=\frac{a^2}{2} \text{ 或 } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2=\frac{a^2}{2}$$

令 $\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta, \frac{x}{2}+y=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta, \theta\in[0,2\pi]$，$\theta$ 增加时投影曲线为逆时针方向，则 $x=\sqrt{\frac{2}{3}}a\cos\theta, y=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{a}{\sqrt{6}}\cos\theta$，

代入到 $x+y+z=0$ 中，得

$$z=-\frac{a}{\sqrt{6}}\cos\theta-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta, \text{故 } \Gamma:\begin{cases} x=\sqrt{\frac{2}{3}}a\cos\theta \\ y=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{a}{\sqrt{6}}\cos\theta \\ z=-\frac{a}{\sqrt{6}}\cos\theta-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{cases}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

下面根据上述参数方程解决之：

(1) $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ 对应参数为 $\theta_0=\frac{\pi}{6}$，计算切向量

$$\vec{l}=(x'(\theta_0),y'(\theta_0),z'(\theta_0))=\left(-\frac{a}{\sqrt{6}},\frac{2a}{\sqrt{6}},-\frac{a}{\sqrt{6}}\right)$$

曲线 Γ 在点 $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ 的切线方程为

$$\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+\frac{\sqrt{2}}{2}a}{1}.$$

(2) 根据参数方程，容易计算 $\oint_\Gamma(3x^2+z)\mathrm{d}s=2\pi a^3$.

(3) 根据参数方程，并注意到 $\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=0$，容易计算 $\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=-\sqrt{3}\pi a^2$.

解法二　结合积分曲线和被积函数的特定形式，进行技巧性的计算.

(1) 利用空间曲线由函数方程组 $F_1(x,y,z)=0, F_2(x,y,z)=0$ 确定时，点 M

处的切线方程公式：

$$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

令 $F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2,F_2(x,y,z)=x+y+z$,则

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_M=\left|\begin{matrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{matrix}\right|_M=\sqrt{2}a$$

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_M=\left|\begin{matrix}2z & 2x\\ 1 & 1\end{matrix}\right|_M=-2\sqrt{2}a$$

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_M=\left|\begin{matrix}2x & 2y\\ 1 & 1\end{matrix}\right|_M=\sqrt{2}a$$

故曲线 Γ 在点 $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$的切线方程为$\dfrac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+\frac{\sqrt{2}}{2}a}{1}$.

(2) 由对称性知,$\oint_\Gamma x^2\mathrm{d}x=\oint_\Gamma y^2\mathrm{d}x=\oint_\Gamma z^2\mathrm{d}x,\oint_\Gamma x\mathrm{d}x=\oint_\Gamma y\mathrm{d}x=\oint_\Gamma z\mathrm{d}x$,于是

$$\oint_\Gamma(3x^2+z)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_\Gamma 3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s+\frac{1}{3}\oint_\Gamma(x+y+z)\mathrm{d}s=a^2\oint_\Gamma\mathrm{d}s=2\pi a^3$$

(3) 设 S 为 Γ 围成的圆面,根据右手系,上侧为正侧,其法线正方向的方向余弦为$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,根据 Stokes 公式及两类曲面的关系,计算得:

$$\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=-\iint_S\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_S\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

4.4.2 Green 公式与曲线积分

例 4.4.3 求 $I=\int_L 4x^3y\cos y\mathrm{d}x+(x^4\cos y-x^4y\sin y)\mathrm{d}y$. 其中 $L:y=\frac{\pi}{3}x^2$ 是从 $O(0,0)$到 $A(1,\frac{\pi}{3})$ 的弧段.

解 令 $P=4x^3y\cos y,Q=x^4\cos y-x^4y\sin y$,

则$\dfrac{\partial P}{\partial y}=4x^3\cos y-4x^3y\sin y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,此时曲线积分与路径无关.

取折线段路径

$$\overline{OB}: x=0, y=y, 0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{3}, \overline{BA}: y=\frac{\pi}{3}, x=x, 0\leqslant x\leqslant 1.$$

则 $$I=\int_{\overline{OB}+\overline{BA}} 4x^3 y\cos y\mathrm{d}x+(x^4\cos y-x^4 y\sin y)\mathrm{d}y=\frac{2\pi}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}.$$

例 4.4.4　已知 $\mathrm{d}u=(\mathrm{e}^{xy}+xy\mathrm{e}^{xy})\mathrm{d}x+x^2\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y$，求原函数 $u(x,y)$.

解法一　曲线积分与路径无关，取折线段积分路径 $(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$.

$$u(x,y)=\int_0^x \mathrm{d}x+\int_0^y x^2\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y+C=x+x\mathrm{e}^{xy}-x+C=x\mathrm{e}^{xy}+C.$$

解法二　已知 $\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^{xy}+xy\mathrm{e}^{xy}, \frac{\partial u}{\partial y}=x^2\mathrm{e}^{xy}$，故 $u(x,y)=\int x^2\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y+\varphi(x)=x\mathrm{e}^{xy}+\varphi(x)$，进而又推出 $\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^{xy}+xy\mathrm{e}^{xy}+\varphi'(x)$，于是 $\mathrm{e}^{xy}+xy\mathrm{e}^{xy}=\mathrm{e}^{xy}+xy\mathrm{e}^{xy}+\varphi'(x)$，$\varphi'(x)=0$，$\varphi(x)=C$，$u(x,y)=x\mathrm{e}^{xy}+C$.

例 4.4.5　计算 $I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+xy+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=r^2(r>0)$，按逆时针方向.

解法一　（直接转化为定积分计算）

分析：从积分路径 $x^2+y^2=r^2$（逆时针）着手，其参数方程易于表出，直接转化为定积分计算.

L 的参数方程为 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$\theta$ 从 0 变到 2π 与 L 的方向相容.

$$\begin{aligned}
\text{则 } I&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}=2\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}\\
&=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}\right)\\
&=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-\cos\theta\sin\theta}\right).
\end{aligned}$$

其中 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}\xlongequal{u=\tan\theta}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u+u^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(u+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u+\frac{1}{2}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

同理可得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-\cos\theta\sin\theta}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$，故 $I=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$.（此法，对定积分计算能力要求很

高)

解法二 (使用 Green 公式)

分析:令 $P=\dfrac{-y}{x^2+xy+y^2}$,$Q=\dfrac{x}{x^2+xy+y^2}$,有$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+xy+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,考虑使用 Green 公式.

因为$\dfrac{\partial P}{\partial y}$,$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$在原点(0,0)不连续,无法直接使用 Green 公式,故考虑将(0,0)挖去.

取充分小的正数 ε,记椭圆 L_1 为 $x^2+xy+y^2=\varepsilon^2$,使 L_1 在 L 所围区域内部,且取逆时针方向.按 Green 公式的方向要求,记 D 为 L 与 L_1^- 所围区域,D_1 为 L_1 所围区域.于是,由 Green 公式知,$\displaystyle\oint_{L+L_1^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+xy+y^2}=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

从而 $I=\displaystyle\oint_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+xy+y^2}$,对这个积分,将 $x^2+xy+y^2=\varepsilon^2$ 代入才能再用 Green 公式,就有 $I=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\oint_{L_1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{2}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\varepsilon^2}S_{D_1}=\frac{2}{\varepsilon^2}\frac{2\pi\varepsilon^2}{\sqrt{3}}=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$.

(此法,对 Green 公式的掌握及几何分析能力要求很高,其中 S_{D_1} 的求法我们将在例 4.4.6 中详细研究).

注 1 计算平面曲线上的第二型曲线积分,有两种方法,一是通过给出积分曲线的参数方程,将第二型曲线积分化为定积分计算,这时要注意参数变化与积分曲线方向是否相容,或者考虑 Green 公式将其转化为二重积分计算,这时要求积分曲线封闭及函数 P、Q、$\dfrac{\partial P}{\partial y}$、$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在所围区域的连续性,这就产生了不封闭时的"补"和不连续时的"挖"(后面的奥-高公式也有类似情况).

从解法二可以看出,将"L 为圆周 $x^2+y^2=r^2(r>0)$,按逆时针方向"改变为"L 为不自交的内部包含原点的光滑逆向闭曲线"不影响计算结果.

注 2 该例题的特殊情形是:

计算曲线积分 $I=\displaystyle\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$,其中 L 为不自交的环绕原点的光滑逆向闭曲线.

该题的一般情形是:

计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$，其中 L 为不自交的环绕原点的光滑逆向闭曲线，$A>0, AC-B^2>0$.

事实上，令 $P=\frac{-y}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}, Q=\frac{x}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$，

有
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{Cy^2-Ax^2}{(Ax^2+2Bxy+Cy^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

由此可将 L 取为椭圆 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$，且逆向为正，计算得

$$I=\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

下面的两个例子（例 4.4.6 和例 4.4.7）多少与曲线积分有些关系，我们把它们安排在这部分，权当对之前所学的一次检阅，如果读者仔细品味，一定会有新的收获.

前面用到椭圆 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 围成区域面积为 $\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$ 的结论，这是一个典型的求平面区域面积的问题. 这类问题通常用二重积分就可以解决，我们已经在上一节的习题中有所体现. 需要指出的是，计算封闭平面曲线围成区域的面积的方法是多样的，这来自对区域围线的具体分析.

例 4.4.6　设 $A>0, AC-B^2>0$，求 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 所围区域 D 的面积 S.

解法一　利用二重积分

将 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 配方得 $\left(A-\frac{B^2}{C}\right)x^2+C\left(y+\frac{B}{C}x\right)^2=1$.

做变换：
$$u=\sqrt{A-\frac{B^2}{C}}x, v=\sqrt{C}\left(y+\frac{B}{C}x\right),$$

则
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\sqrt{AC-B^2}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}$$

于是
$$S=\iint\limits_{Ax^2+2Bxy+Cy^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$$

在此解法下，可类似求得：

(1) 曲线 $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$ $(a_1b_2-a_2b_1\neq 0)$ 所围区

域 D 的面积.

$$S=\frac{\pi}{|a_1b_2-a_2b_1|}.$$

(2)D 由曲线$(x+2y)^2+(2x+3y)^2=8$ 所围成,求区域 D 的面积.

令
$$u=x+2y, v=2x+3y,$$

则 $J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|}=1$,此时 D 表为 $u^2+v^2\leqslant 8$,$S_D=8\pi$.

解法二 利用面积公式 $S=\left|\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\right|$.

将 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 配方得$\left(A-\frac{B^2}{C}\right)x^2+C\left(y+\frac{B}{C}x\right)^2=1$.

令
$$\sqrt{A-\frac{B^2}{C}}x=\cos\theta, \sqrt{C}\left(y+\frac{B}{C}x\right)=\sin\theta,$$

则
$$x=\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{AC-B^2}}\cos\theta, y=\frac{1}{\sqrt{C}}\left(\sin\theta-\frac{B}{\sqrt{AC-B^2}}\cos\theta\right), 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

由 Green 公式知 $S=\left|\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\right|=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$.(由于未规定 L:$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 的方向,故加上绝对值)

关于该题的解法还有许多种,我们再列出一些解法.

基于定积分的两种方法如下.

解法三 方程 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 可化为

$y=-\frac{Bx}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{C-(AC-B^2)x^2}$,且求得 x 的变化范围是

$\left[-\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}},\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}}\right]$,记 $\Delta=\sqrt{AC-B^2}$. 于是,

$$S=\frac{2}{C}\int_{-\frac{\sqrt{C}}{\Delta}}^{\frac{\sqrt{C}}{\Delta}}\sqrt{C-\Delta^2x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{C}\int_0^{\frac{\sqrt{C}}{\Delta}}\sqrt{C-\Delta^2x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\sqrt{C}}\int_0^{\frac{\sqrt{C}}{\Delta}}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{\sqrt{C}}x\right)^2}$$

$$\xlongequal{u=\frac{\Delta}{\sqrt{C}}x}\frac{4}{\Delta}\int_0^1\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{4}{\Delta}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

解法四 利用极坐标 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,化 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 为极坐标方程为

$$\rho^2=\frac{1}{A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

则
$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right)\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{A+2B\tan\theta+C\tan^2\theta}$$

$$=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)\frac{\frac{1}{C}\mathrm{d}\left(\frac{B}{C}+\tan\theta\right)}{\left(\frac{\sqrt{AC-B^2}}{C}\right)^2+\left(\frac{B}{C}+\tan\theta\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\left(\arctan\frac{B+C\tan\theta}{\sqrt{AC-B^2}}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\arctan\frac{B+C\tan\theta}{\sqrt{AC-B^2}}\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{B}{\sqrt{AC-B^2}}+\arctan\frac{B}{\sqrt{AC-B^2}}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

基于解析几何相关知识的两种方法如下.

解法五 将给定曲线视作平面与球面交线在坐标面上的投影

将 $z=Ex+Fy$(此平面不平行于 z 轴)代入到 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 中得:

$$(1+E^2)x^2+2EFxy+(1+F^2)y^2=r^2.$$

平面 $z=Ex+Fy$ 与 xoy 坐标面所成锐角余弦为 $\frac{1}{\sqrt{1+E^2+F^2}}$,故 $z=Ex+Fy$ 被 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 截得圆面在 xoy 坐标面的投影面积为 $\frac{\pi r^2}{\sqrt{1+E^2+F^2}}$.

令
$$1+E^2=Ar^2,EF=Br^2,1+F^2=Cr^2,$$

这时 $(1+E^2)x^2+2EFxy+(1+F^2)y^2=r^2$ 就是 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$.

此时
$$1+E^2+F^2=(1+E^2)(1+F^2)-E^2F^2=(AC-B^2)r^4,$$

于是 $S=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$.

解法六 利用旋转变换将二次曲线化简

不妨设 $B\neq 0$(若 $B=0$,则面积易求得为 $\frac{\pi}{\sqrt{AC}}$).此时为消去中间项,将旋转

变换$\begin{cases}x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\end{cases}$代入到$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$中并整理得：

$(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)x'^2 + 2[(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]x'y' + (A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)y'^2 = 1$

令中间项系数为零，即$(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$，

设$k = \tan\alpha$，上式简化为$Bk^2 + (A - C)k - B = 0$，即

$$Bk^2 + Ak = B + Ck \text{ 或 } Ak - B = Ck - Bk^2.$$

进而二次项系数$A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha = \cos^2\alpha(A + 2B\tan\alpha + C\tan^2\alpha) = \dfrac{1}{1+k^2}(A + 2Bk + Ck^2) = \dfrac{1}{1+k^2}(A + Bk + k(B + Ck)) = A + Bk.$

同理 $$A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha = C - Bk.$$

于是方程$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$化为$(A + Bk)x'^2 + (C - Bk)y'^2 = 1$.

因为$(A + Bk)(C - Bk) = AC - B(Bk^2 - Ck + Ak) = AC - B^2$，

故$S = \dfrac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}$.

例 4.4.7 设上半球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geqslant 0)$与柱面$x^2 + y^2 = ax$，$a > 0$，$\Gamma$为它们的交线(称为维维安尼曲线)从$x$轴正向看逆时针为正向.

(1) 求由这两个曲面及$z = 0$所围立体的体积V；

(2) 求由这两个曲面及$z = 0$所围立体的表面积S；

(3) 求维维安尼曲线Γ的弧长s；

(4) 求$I = \oint_\Gamma z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$.

解 (1) 所围立体关于xoz坐标平面对称，设D_1是上半圆域$x^2 + y^2 \leqslant ax$ $(y \geqslant 0)$，则球面方程为$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，于是

$$V = 2\iint_{D_1} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2 - r^2}r\mathrm{d}r = \frac{2}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

(2) 用S_1表示第一卦限中球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$被柱面$x^2 + y^2 = ax$所截得部分，用S_2表示第一卦限中柱面$x^2 + y^2 = ax$被球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$所截得部分，则

$$S = 2\left(\iint_{S_1} dS + \iint_{S_2} dS\right) + \frac{1}{4}\pi a^2.$$

对于 S_1，其在 xoy 坐标面的投影区域为 $D_1: x^2 + y^2 \leqslant ax\,(y \geqslant 0)$，相应球面方程 S_1 为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，于是

$$\iint_{S_1} dS = \iint_{D_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx dy = \iint_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta) d\theta = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

对于 S_2，需要用到第一型曲线积分的几何意义：$\int_L f(x,y) ds\,(f(x,y) \geqslant 0, (x, y) \in L)$ 是以 L 为准线，母线平行于 z 轴的柱面夹在 xoy 坐标面和曲面 $z = f(x, y)$ 之间部分的面积.

因此，令 $L: x^2 + y^2 = ax\,(y \geqslant 0)$，则 $S_2 = \int_L \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} ds$.

$x^2 + y^2 = ax\,(y \geqslant 0)$ 的极坐标方程为 $r = a\cos\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$，从而 L 可表示为参数形式：

$$x = a\cos^2\theta, y = a\sin\theta\cos\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} d\theta = a d\theta.$$

（或对 $x^2 + y^2 = ax\,(y \geqslant 0)$ 采用参数方程 $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\theta, y = \frac{a}{2}\sin\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ 求之）

于是，

$$S_2 = \int_L \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} ds = \int_L \sqrt{a^2 - ax}\, ds$$

$$= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\cos^2\theta} d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = a^2.$$

于是，

$$S = 2\left(\iint_{S_1} dS + \iint_{S_2} dS\right) + \frac{1}{4}\pi a^2 = \frac{5}{4}\pi a^2.$$

注　对于 S_2 的另外一个求法是，从 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$ 消去 y 得，S_2 在 xoz 坐标平面的投影区域为 $D_2: 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - ax}, 0 \leqslant x \leqslant a$，相应柱面方程 S_2 为 $y = \sqrt{ax - x^2}$. 于是，

$$\iint_{S_2}\mathrm{d}S=\iint_{D_2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D_2}\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-ax}}\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}\mathrm{d}z=a^2.$$

(3) 首先建立 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x^2+y^2-ax=0\end{cases}$ 的参数方程.

首先求 Γ 在 xoy 坐标面的投影曲线 $x^2+y^2-ax=0$ 的参数方程，其极坐标方程为

$$r=a\cos\theta,\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

再化为直角坐标系下的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos^2\theta\\y=a\sin\theta\cos\theta\end{cases},$$

将之代入到 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant0)$ 中解得 $z=a|\sin\theta|$.

当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$x=a\cos^2\theta,y=a\sin\theta\cos\theta,z=a\sin\theta$；

当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant0$ 时，令 $t=\pi+\theta,\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\pi$，则

$$x=a\cos^2t,y=a\sin t\cos t,z=a\sin t.$$

于是 Γ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos^2\theta\\y=a\sin\theta\cos\theta,\quad0\leqslant\theta\leqslant\pi.\\z=a\sin\theta\end{cases}$

$$s=\int_0^\pi\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}\theta=a\int_0^\pi\sqrt{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}a\int_0^\pi\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}a.$$

(4) **解法一** 已求得 Γ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos^2\theta\\y=a\sin\theta\cos\theta,0\leqslant\theta\leqslant\pi,\\z=a\sin\theta\end{cases}$ 注意到 θ 增加时投影曲线为逆时针方向. 由此计算 $I=a^2\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$.

解法二 根据 Stokes 公式得 $I=\oint_\Gamma z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\iint_\Delta\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，

其中 Δ 为 Γ 所围球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的部分，取上侧为正侧.

则 Δ 在 xoy 坐标平面的投影区域为 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant ax$，为求得 Δ 在 yoz 坐标平面的投影区域，从 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x^2+y^2-ax=0\end{cases}$ 消去 x，即将 $x=\sqrt{a^2-y^2-z^2}$ 代入到 $x^2+y^2-ax=0$ 中并整理，可得

$$D_{yz}: -\frac{z}{a}\sqrt{a^2-z^2}\leqslant y\leqslant\frac{z}{a}\sqrt{a^2-z^2}, 0\leqslant z\leqslant a.$$

根据对称性，$\iint\limits_{\Delta}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，$\iint\limits_{\Delta}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\pi a^2$，

$$\iint\limits_{\Delta}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^a\mathrm{d}z\int_{-\frac{z}{a}\sqrt{a^2-z^2}}^{\frac{z}{a}\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\int_0^a 2z\sqrt{a^2-z^2}\,\mathrm{d}z=\frac{2}{3}a^2,$$

$$I=\iint\limits_{\Delta}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{2}{3}a^2+0=a^2\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right).$$

思考题 4.4

1. 计算 $\oint_L[(x+1)^2+(y+1)^2]\mathrm{d}s$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线.

2. 计算 $I=\oint_L\frac{\mathrm{e}^x}{x^2+y^2}[(x\sin y-y\cos y)\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y]$，其中 L 为不自交的内部包含原点的光滑逆向闭曲线.

3. 设曲线积分 $\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{y^2+\varphi(x)}=A$（常数），其中 $\varphi(x)$ 为可导函数，且 $\varphi(1)=1$，L 为绕原点一周的逆时针光滑曲线，求 $\varphi(x)$，并求 A 值.

4. 求指数 λ，使得 $\frac{x}{y}r^{\lambda}\mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}r^{\lambda}\mathrm{d}y$ 为某函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求 $u(x,y)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

5. 已知 $\mathrm{d}u=z\left(\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x^2+z^2}\right)\mathrm{d}x+\frac{z}{xy^2}\mathrm{d}y+\left(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\right)\mathrm{d}z$，求原函数 $u(x,y,z)$.

6. 计算 $I=\oint_L(y^2-z)\mathrm{d}x+(x-2yz)\mathrm{d}y+(x-y^2)\mathrm{d}z$，

其中 L 为曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x^2+y^2=2bz\end{cases}$，$z\geqslant 0,a,b>0$. L 从 z 轴正向看为逆时针方向.

4.5 曲面积分

关于第一型曲面积分的计算方法有如下结论.

(1) 设函数 $f(x,y,z)$ 在逐片光滑曲面 $S:x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in D$ 上连续，其中 D 为有界闭区域，则第一型曲面积分

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

其中 $EG-F^2=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2$，另外还有

$$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2,G=x_v^2+y_v^2+z_v^2,F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v.$$

特别地，如果曲面为 $S:z=z(x,y),(x,y)\in D$，则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

曲面 S 的面积 $\quad S=\iint_S \mathrm{d}S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(2) 两类曲面积分之间的关系

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S.$$

这里$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为曲面 S 的正侧单位法向量.

关于第二型曲面积分的计算方法有如下结论.

(3) 设函数 P,Q,R 在光滑曲面 $S:x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in D$ 上连续，其中 D 为有界闭区域，则第二型曲面积分的参数方程计算公式为：

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_S\Big[P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+$$

$$Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中曲面 S 上对应于参数(u,v) 的点处的法向量 $\vec{n}=\pm\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$，

符号“±”由曲面 S 的正侧决定(例如,上侧为正侧时,若 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}>0$ 则取“+”,若 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}<0$ 则取“−”).

特别地,如果曲面为 $S: z=z(x,y),(x,y)\in D$,则

$$\text{法向量 } \vec{n}=\pm(-z_x,-z_y,1),$$

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\mathrm{d}S=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cos\gamma\mathrm{d}S=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-z_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\mathrm{d}S=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cos\gamma\mathrm{d}S=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-z_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

以上两个公式不受曲面侧的影响.

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S[P\cdot(-z_x)+Q\cdot(-z_y)+R]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\pm\iint_D[P(x,y,z(x,y))(-z_x)+Q(x,y,z(x,y))(-z_y)+R(x,y,z(x,y))]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这个结果可由第二型曲面积分的参数方程计算公式推得,只需将 S 表示为:$x=x,y=y,z=z(x,y),(x,y)\in D$,其中当曲面 S 的上侧为正侧时,取“+”,否则取“−”.

(4)(奥-高公式)设函数 P,Q,R 及其偏导数在有界闭体 V 上连续,边界 ∂V 为分片光滑双侧封闭曲面且取外侧为正,则

$$\oiint_{\partial V}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

特别地,有界闭体 V 的体积可如下计算:

$$V=\oiint_{\partial V}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\partial V}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\oiint_{\partial V}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\oiint_{\partial V}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4.5.1　第一型曲面积分

例 4.5.1　计算 $\iint_\Sigma(x^2+y^2)\mathrm{d}S$,其中 Σ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2,z\geqslant 0$.

解法一　半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2,z\geqslant 0$ 可表为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,(x^2+y^2\leqslant a^2),\ \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

于是，
$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=a\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标变换}}a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r\xlongequal[0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}]{r=\sin t}2\pi a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\pi a^4.$$

解法二 根据球面坐标变换将上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2,z\geqslant 0$ 表为参数方程：

$x=a\sin\varphi\cos\theta,y=a\sin\varphi\sin\theta,z=a\cos\varphi,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，则

$$\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}\right)^2}=a^2\sin\varphi.$$

于是，
$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=a^4\iint_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}}}\sin^3\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{3}\pi a^4.$$

解法三 取 Σ 的上侧为正侧，则其相应的单位法向量为$\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)$，记 Σ_0 为 Σ 在 xoy 坐标面上的投影，并取下侧，由 Σ_0 和 Σ 围成空间区域记为 Ω，于是根据两类曲面积分的关系和高斯公式知，

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=a\iint_{\Sigma}\left(x\cdot\frac{x}{a}+y\cdot\frac{y}{a}\right)\mathrm{d}S=a\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=a\left(\iiint_{\Omega}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{\Sigma_0}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x\right)=2a\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2a\cdot\frac{2}{3}\pi a^3=\frac{4}{3}\pi a^4.$$

解法四 此题更有趣的解法是利用积分曲面的对称性及被积函数的奇偶性. 为此记 Σ' 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，则

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S\xlongequal{x^2+y^2\text{视作关于}z\text{的偶函数}}\frac{1}{2}\iint_{\Sigma'}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

$$\xlongequal{\text{轮换对称性}}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\iint_{\Sigma'}[(x^2+y^2)+(x^2+z^2)+(z^2+y^2)]\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma'}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}a^2\iint_{\Sigma'}\mathrm{d}S=\frac{4\pi}{3}a^4.$$

在例 4.5.1 的解法三中，我们是利用第二型曲面积分计算了第一型曲面积分，

这种方法对于封闭曲面上的第一型曲面积分很有效.

例 4.5.2　计算$\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z+\sqrt{3}d)\mathrm{d}S$,其中 Σ 为球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$.

解　取 Σ 的外侧为正侧,则其相应的单位法向量为$\left(\frac{x-a}{r},\frac{y-b}{r},\frac{z-c}{r}\right)$,于是,

$$
\begin{aligned}
&\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z+\sqrt{3}d)\mathrm{d}S\\
&=r\oiint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x-a}{r}+\frac{y-b}{r}+\frac{z-c}{r}+\frac{\sqrt{3}d+a+b+c}{r}\right)\mathrm{d}S\\
&=\oiint\limits_{\Sigma}(\sqrt{3}d+a+b+c)\mathrm{d}S+r\oiint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=4(\sqrt{3}d+a+b+c)\pi r^2
\end{aligned}
$$

(其中$\oiint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,考虑一下为什么?)

例 4.5.3　计算$\iint\limits_{\Sigma}xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\mathrm{d}S$,其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限部分.

解　取 Σ 的上侧为正侧,则其相应的单位法向量为$\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)$,

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma}xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\mathrm{d}S=a\iint\limits_{\Sigma}\left(y^3z^3\frac{x}{a}+z^3x^3\frac{y}{a}+x^3y^3\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}S\\
&=a\iint\limits_{\Sigma}y^3z^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^3x^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^3y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=3a\iint\limits_{\Sigma}x^3y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant0,\,y\geqslant0}}x^3y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^7\sin^3\theta\cos^3\theta\mathrm{d}r=\frac{1}{32}a^9.
\end{aligned}
$$

4.5.2　第二型曲面积分

例 4.5.4　求第二型曲面积分$\iint\limits_{S}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是锥面

$x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$，取外侧为正侧.

解法一（分面投影） 设 $I=\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则

$$I=\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_S y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

根据对称性 $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_S y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0.$

因锥面 S 在 xoy 坐标面的投影区域为 $D:x^2+y^2\leqslant h^2$，S 的正侧外法线与 z 轴方向的夹角为钝角，取符号"－"，得

$$\iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h r^3\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{2}h^4,$$

于是，$$I=\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_S y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+0-\frac{\pi}{2}h^4=-\frac{\pi}{2}h^4.$$

解法二（转化为第一型曲面积分）

由 S 是锥面 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$，求得 S 的正侧外法线的方向余弦

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

于是 $$I=\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_S\left(\frac{x^3}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^3}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{z^2}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}\left(\frac{x^3}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^3}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2+y^2}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{\pi}{2}h^4.$$

解法三（转化为相同变量下的第二型曲面积分）

$$I=\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_S\left(\frac{-x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}\left(\frac{-x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}+x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2}h^4.$$

解法四（利用奥-高公式） 作辅助平面 $S_1:z=h\quad(x^2+y^2\leqslant h^2)$，取上侧为

正侧.

由奥-高公式得：

$$\oiint\limits_{S+S_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iiint\limits_V (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 2\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^h \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^h \pi z^3\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}h^4,$$

$$\iint\limits_{S_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{S_1} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2} h^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi h^4,$$

于是
$$I = \iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}h^4 - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2}h^4.$$

解法五（利用参数方程）

锥面 S 的参数方程为 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = r(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant h)$.

因为锥面 S 外侧为正侧，故根据曲面参数方程法向量求法，可求得正侧外法向量为$(r\cos\theta, r\sin\theta, -r)$，于是

$$I = \iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ 0\leqslant r\leqslant h}} (r^2\cos^2\theta\cdot r\cos\theta + r^2\sin^2\theta\cdot r\sin\theta - r^2\cdot r)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^h \mathrm{d}r\int_0^{2\pi} r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta - 1)\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{2}h^4.$$

例 4.5.5　求第二型曲面积分$\iint\limits_S \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$，取外侧为正侧，$(a,b,c>0)$.

类似于例 4.4.5 分析：

令 $P = \frac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}, Q = \frac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}, R = \frac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$,

有$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$，考虑使用奥-高公式. 因为 P,Q,R 在原点$(0,0,0)$不连续，考虑将其"挖"去.

解　令椭球面 $S_1: ax^2 + by^2 + cz^2 = \varepsilon^2$（$\varepsilon$ 为充分小正数. S_1 含在 S 里面），取外侧为正. 设 S_1 与 S 之间的部分空间区域为 V，椭球体 $\Omega: ax^2 + by^2 + cz^2 \leqslant \varepsilon^2$.

由奥-高公式知，$\iint\limits_{S}+\iint\limits_{S_1^-}=\iiint\limits_{V}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，故$\iint\limits_{S}=\iint\limits_{S_1}$，即

$$\iint\limits_{S}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}=\iint\limits_{S_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4\pi}{\sqrt{abc}}.$$

思考题 4.5

1. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S}f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, & 0\leqslant z\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\\ 0, & z<0 \text{ 或 } z>\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$，S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

2. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S}(x^3+y^3+z^3-ax^2-by^2-cz^2)\mathrm{d}S$，其中 S 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$.

3. 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{S}(x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是闭曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$，方向取外侧.

4. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是半球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx\ (z>0)$ 被柱面 $x^2+y^2=2rx\ (R>r>0)$ 截下的部分，取上侧为正侧.

5. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S}(x+a^2f(x,y,z))\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+b^2f(x,y,z))\mathrm{d}z\mathrm{d}z+(z+c^2f(x,y,z))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ (a+b+c=0,c>0)$ 被坐标平面截下的部分，取上侧为正侧.

附录 Ⅰ　Stolz 定理与 L′hospital 法则

1.1　Stolz 定理

定理 1(数列极限$\frac{0}{0}$Stolz 定理) 若数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足如下条件:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$;(2)$\{b_n\}$严格单调;(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$($l$为有限数、$+\infty$或$-\infty$),则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$.

证明　(1) 当$\{b_n\}$严格增加时,分l为有限数、$+\infty$或$-\infty$三种情形讨论之.

情形(a)　l为有限数,由条件(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$知,

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall n>N,\text{有 } l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<l+\varepsilon.$$

于是对 $\forall p\in N_+$,有$(l-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<(l+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)$

$$(l-\varepsilon)(b_{n+2}-b_{n+1})<a_{n+2}-a_{n+1}<(l+\varepsilon)(b_{n+2}-b_{n+1})$$

$$\cdots$$

$$(l-\varepsilon)(b_{n+p}-b_{n+p-1})<a_{n+p}-a_{n+p-1}<(l+\varepsilon)(b_{n+p}-b_{n+p-1})$$

以上式子相加得,$(l-\varepsilon)(b_{n+p}-b_n)<a_{n+p}-a_n<(l+\varepsilon)(b_{n+p}-b_n)$.

由条件(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$知,对于任意固定的 $\forall n>N$,有$\lim\limits_{p\to\infty}a_{n+p}=\lim\limits_{p\to\infty}b_{n+p}=0$. 于是令 $p\to\infty$,就有$(l-\varepsilon)(-b_n)\leqslant-a_n\leqslant(l+\varepsilon)(-b_n)$.

注意到$b_n<0$,从而$l-\varepsilon\leqslant\frac{a_n}{b_n}\leqslant l+\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$.

情形(b)　l为$+\infty$,由条件(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=+\infty$知, 对$B=1$,$\exists N\in N_+$,$\forall n\geqslant N$,有

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}>1 \text{ 或 } a_{n+1}-a_n>b_{n+1}-b_n>0.$$

故$\{a_n\}$可视作严格增加数列且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=0$，从而据情形(a)知，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0 \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty.$$

情形(c)　l为$-\infty$，由条件(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=-\infty$知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-a_{n+1}-(-a_n)}{b_{n+1}-b_n}$ $=+\infty$，从而据情形(b)知，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-a_n}{b_n}=+\infty \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-\infty.$$

(2) 当$\{b_n\}$严格减少时$\{-b_n\}$严格增加，由条件(3)推知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{-b_{n+1}-(-b_n)}$ $=-l$，据(1)知，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_n}{-b_n}=-l \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l.$$

定理 2　($\frac{*}{\infty}$Stolz 定理) 若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足如下条件：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$；(2) $\{b_n\}$严格单调；(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$（$l$为有限数、$+\infty$或$-\infty$），则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$.

证明　仅证$\{b_n\}$严格增加且l为有限数和$+\infty$的情形.

当l为有限数时，由条件知$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，故不妨设$b_n>0$. 由条件(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$知，

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in N_+,\ \forall n\geqslant N,\text{有 } l-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<l+\frac{\varepsilon}{2}.$$

对$\forall n>N$，有$(l-\frac{\varepsilon}{2})(b_{N+1}-b_N)<a_{N+1}-a_N<(b_{N+1}-b_N)(l+\frac{\varepsilon}{2})$

$$(l-\frac{\varepsilon}{2})(b_{N+2}-b_{N+1})<a_{N+2}-a_{N+1}<(b_{N+2}-b_{N+1})(l+\frac{\varepsilon}{2})$$

$$\cdots$$

$$(l-\frac{\varepsilon}{2})(b_n-b_{n-1})<a_n-a_{n-1}<(b_n-b_{n-1})(l+\frac{\varepsilon}{2})$$

以上式子相加得：$(l-\frac{\varepsilon}{2})(b_n-b_N)<a_n-a_N<(b_n-b_N)(l+\frac{\varepsilon}{2})$. 进而，

$$\text{对 } \forall n>N, \text{有 } l-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}<l+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$ 知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_N-lb_N}{b_n}=0$，从而

$$\text{对上述 } \forall\varepsilon>0, \exists N'\in N_+, \forall n>N', \text{有} \left|\frac{a_N-lb_N}{b_n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N''=\max\{N,N'\}$，对 $\forall n>N''$，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n}-l\right| &= \left|\frac{a_N-lb_N}{b_n}\right|+\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right)\left|\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}-l\right| \\ &\leqslant \left|\frac{a_N-lb_N}{b_n}\right|+\left|\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$.

l 为 $+\infty$ 时，由条件(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=+\infty$ 知，

$$\text{对 } \exists N\in N_+, \forall n\geqslant N, \text{有 } a_{n+1}-a_n>b_{n+1}-b_n>0.$$

从而对 $\forall n>N$，有 $a_{N+1}-a_N>b_{N+1}-b_N, a_{N+2}-a_{N+1}>b_{N+2}-b_{N+1},\cdots,$

$a_n-a_{n-1}>b_n-b_{n-1}$，以上式子相加得：$a_n-a_N>b_n-b_N$.

故 $\{a_n\}$ 可视作严格增加正无穷大数列且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=0$，从而据 l 为有限数情形知，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0 \text{ 或} \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty.$$

1.2　L'hospital 法则

定理 3　（$\frac{0}{0}$ L'hospital 法则 I）若函数 $f(x), g(x)$ 满足如下条件：

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$；(2) $f(x), g(x)$ 在 $\mathring{U}(a,\delta)$ 可导且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

($\frac{0}{0}$L'hospital 法则 Ⅱ) 若函数 $f(x),g(x)$ 满足如下条件:(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$;(2) $f(x),g(x)$ 在 $\{x \mid |x|>A\}$ 可导且 $g'(x)\neq 0$;(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

证明　仅证 $\frac{0}{0}$L'hospital 法则 Ⅰ,同理可证 $\frac{0}{0}$L'hospital 法则 Ⅱ.

先证 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$,根据海涅定理,这只需证:

$$对严格减少的\ \forall\{a_n\},a_n>a,a_n\to a,有\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=l.$$

下面验证数列 $\{f(a_n)\}\{g(a_n)\}$ 满足定理 1 诸条件.

因 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}g(a_n)=0$,即数列 $\{f(a_n)\}\{g(a_n)\}$ 满足定理 1 条件(1).

因 $\forall x\in \mathring{U}_+(a,\delta),g'(x)\neq 0$,故由 Darboux 定理知 $\forall x\in \mathring{U}_+(a,\delta),g'(x)$ 不变号,即 $g(x)$ 在 $\mathring{U}_+(a,\delta)$ 严格单调,从而 $\{g(a_n)\}$ 严格单调,即满足定理 1 条件(2).

由 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ 及 Cauchy 中值定理知,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_{n+1})-f(a_n)}{g(a_{n+1})-g(a_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l,$$

即满足定理 1 条件(3).

于是根据定理 1 知,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=l$. 同理可证 $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)}=l$,从而 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

定理 4　($\frac{*}{\infty}$L'hospital 法则 Ⅰ) 若函数 $f(x),g(x)$ 满足如下条件:

(1) $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$;(2) $f(x),g(x)$ 在 $\mathring{U}(a,\delta)$ 可导且 $g'(x)\neq 0$;(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$,则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

($\frac{*}{\infty}$L'hospital 法则 Ⅱ) 若函数 $f(x),g(x)$ 满足如下条件:(1) $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$;

(2) $f(x)$, $g(x)$ 在 $\{x \mid |x| > A\}$ 可导且 $g'(x) \neq 0$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

证明　仅证 $\dfrac{*}{\infty}$ L'hospital 法则 Ⅱ, 同理可证 $\dfrac{*}{\infty}$ L'hospital 法则 Ⅰ.

先证 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, 根据 Heine 定理, 这只需证:

$$\text{对严格增加的 } \forall \{a_n\}, a_n \to +\infty, \text{有} \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = l.$$

下面验证数列 $\{f(a_n)\}\{g(a_n)\}$ 满足定理 2 诸条件.

因 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = \infty$, 即数列 $\{g(a_n)\}$ 满足定理 2 条件(1).

因 $\forall x \in (A, +\infty)$, $g'(x) \neq 0$, 故由 Darboux 定理知 $\forall x \in (A, +\infty)$, $g'(x)$ 不变号, 即 $g(x)$ 在 $(A, +\infty)$ 严格单调, 从而 $\{g(a_n)\}$ 严格单调, 即满足定理 2 条件(2).

由 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ 及 Cauchy 中值定理知,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_{n+1}) - f(a_n)}{g(a_{n+1}) - g(a_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

即满足定理 2 条件(3).

于是根据定理 2 知, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(a_n)}{g(a_n)} = l$. 同理可证 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, 从而 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

从上述证明可以看出, 对于单侧极限来说 L'hospital 法则也是成立的.

附录 Ⅱ　凸函数与近似凸函数

定义 1　设函数 $f(x)$ 区间 I 上有定义，称函数 $f(x)$ 为 I 上凸函数，如果

$\forall x,y\in I,\forall\lambda\in[0,1]$，有 $f[\lambda x+(1-\lambda)y]\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

定义 2　设函数 $f(x)$ 在区间 I 有定义，称函数 $f(x)$ 为 I 上的近似凸函数，如果

$\exists\alpha\in(0,1),\forall x,y\in I$，有 $f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$.

下面的定义 3 是 1905 年丹麦数学家 Jensen 给出凸函数概念，我们现在称之为次凸函数(又称为中点凸或 Jensen 凸)：

定义 3　设函数 $f(x)$ 在区间 I 有定义，称函数 $f(x)$ 为 I 上的次凸函数，如果

$$\forall x,y\in I,\text{有 } f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

定理 1　若函数 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数，则 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数等价于 $f(x)$ 是区间 I 上的次凸函数.

上述定理的一个证法与例 1.4.2 相仿，详见文献《数学分析中的典型问题与方法(第二版)》(裴礼文编) 或《数学分析(上)(第二版)》(李成章，黄玉民编)，随后给出的定理 2 的证明是这个证法思想的推广.

例 1　若 $f(x)$ 为$[0,b)$ 上的凸函数，则 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为$(0,b)$ 上的凸函数.

证明　因为 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为$(0,b)$ 上连续函数，根据定理 1，只需证

$$\forall x_1,x_2\in(0,b),\text{有 } F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{F(x_1)+F(x_2)}{2}.$$

根据定积分概念，有

$$F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{2}{x_1+x_2}\int_0^{\frac{x_1+x_2}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{kx_1}{n}\right)+\frac{1}{2n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{kx_2}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}\frac{x_1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{kx_1}{n}\right)+\frac{1}{x_2}\frac{x_2}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{kx_2}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}\int_0^{x_1} f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x_2}\int_0^{x_2} f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{F(x_1)+F(x_2)}{2}.$$

定理 1 可以推广为：

定理 2 若函数 $f(x)$ 是区间 I 上的上(下)半连续函数，则 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数等价于 $f(x)$ 是区间 I 上的近似凸函数.

证明定理 2 需要如下定义和引理：

定义 4 设函数 $f(x)$ 在区间 I 有定义，称函数 $f(x)$ 为 I 上的上(或下)半连续函数，若

对 $\forall x_0\in I, \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当 $x\in I$ 且 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon(\text{或 } f(x_0)-\varepsilon<f(x)).$$

引理 1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上的近似凸函数，则集合

$$A=\{\lambda\in[0,1]\mid f[\lambda x+(1-\lambda)y]\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y), \forall x,y\in I\}$$

在 $[0,1]$ 中稠密.

证明 (反证法)假设结论不真，即 A 在 $[0,1]$ 中非稠. 则存在 $\lambda_0\in(0,1)$，使得对于

$$\lambda_1=\inf\{\lambda\in A^f\mid\lambda\geqslant\lambda_0\}, \lambda_2=\sup\{\lambda\in A^f\mid\lambda\leqslant\lambda_0\},$$

根据确界定义，对于 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\max\{\alpha,1-\alpha\}}-1\right)(\lambda_1-\lambda_2)$，存在 $u_1,u_2\in A$，

使得 $\lambda_1\leqslant u_1<\lambda_1+\varepsilon_0, \lambda_2-\varepsilon_0<u_2\leqslant\lambda_2$，于是

$$u_1-u_2<\lambda_1-\lambda_2+2\varepsilon_0=\frac{1}{\max\{\alpha,1-\alpha\}}(\lambda_1-\lambda_2)$$

$$\max\{\alpha,1-\alpha\}(u_1-u_2)<\lambda_1-\lambda_2,$$

令 $\bar{\lambda}=\alpha u_1+(1-\alpha)u_2$，则

$$\bar{\lambda}x+(1-\bar{\lambda})y=\alpha(u_1x+(1-u_1)y)+(1-\alpha)(u_2x+(1-u_2)y).$$

于是 $f[\bar{\lambda}x+(1-\bar{\lambda})y]=f[\alpha(u_1x+(1-u_1)y)+(1-\alpha)(u_2x+(1-u_2)y)]$

$$\leqslant \alpha f[u_1x+(1-u_1)y]+(1-\alpha)f[u_2x+(1-u_2)y]$$

$$\leqslant \alpha[u_1f(x)+(1-u_1)f(y)]+(1-\alpha)[u_2f(x)+(1-u_2)f(y)]$$

$$= [\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2]f(x) + [\alpha(1-u_1) + (1-\alpha)(1-u_2)]f(y)$$
$$= \bar{\lambda}f(x) + (1-\bar{\lambda})f(y)$$

即 $\bar{\lambda} \in A$.

(1) 若 $\bar{\lambda} \geqslant \lambda_0$，由 $\bar{\lambda} - u_2 = \alpha(u_1 - u_2) < \lambda_1 - \lambda_2$ 知 $\bar{\lambda} < \lambda_1$，但 $\bar{\lambda} \geqslant \lambda_0$ 且 $\bar{\lambda} \in A$，这与 λ_1 的取法矛盾.

(2) 若 $\bar{\lambda} \leqslant \lambda_0$，由 $u_1 - \bar{\lambda} = (1-\alpha)(u_1 - u_2) < \lambda_1 - \lambda_2$ 知 $\bar{\lambda} > \lambda_2$，但 $\bar{\lambda} \leqslant \lambda_0$ 且 $\bar{\lambda} \in A$，这与 λ_2 的取法矛盾. 综上，假设不成立，故 A 在 $[0,1]$ 中稠密.

定理 2　证明　凸函数显然是近似凸函数. 反之，

(1) 当 $f(x)$ 是区间 I 上的上半连续近似凸函数时，任取 $\lambda \in [0,1]$，任取 $x, y \in I$，由引理 1 知，A 在 $[0,1]$ 中稠密，故存在 $\lambda_n \in A$，有 $\lambda_n \to \lambda(n \to \infty)$. 令

$$z = \lambda x + (1-\lambda)y, y_n = (z - \lambda_n x)\big/1 - \lambda_n = \frac{\lambda - \lambda_n}{1-\lambda_n}x + \frac{1-\lambda}{1-\lambda_n}y,$$

对于 λ_n 可作如下限制：$\lambda_n \in (0,1), \lambda_n < \lambda$，从而 $0 < \frac{\lambda - \lambda_n}{1-\lambda_n} < 1, \frac{1-\lambda}{1-\lambda_n} = 1 - \frac{\lambda - \lambda_n}{1-\lambda_n}$，

于是 $y_n \in I$，并且 $z = \lambda_n x + (1-\lambda_n)y_n$. 注意到 $y_n \to y(n \to \infty)$，由 $f(x)$ 的上半连续性知，$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N$，有 $f(y_n) < f(y) + \varepsilon$，再由集合 A 的定义及 $\lambda_n \in A$ 知，

$$\text{当 } n > N \text{ 时}, f(z) = f[\lambda_n x + (1-\lambda_n)y_n] \leqslant \lambda_n f(x) + (1-\lambda_n)f(y_n)$$
$$< \lambda_n f(x) + (1-\lambda_n)f(y) + (1-\lambda_n)\varepsilon$$

再令 $n \to \infty$ 并注意 ε 的任意性，就有 $f[\lambda x + (1-\lambda)y] \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$，即函数 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数

(2) 当 $f(x)$ 是区间 I 上的下半连续近似凸函数时，任取 $\lambda \in [0,1]$，任取 $x, y \in I$，因 A 在 $[0,1]$ 中稠密，故存在 $\lambda_n \in A$，，有 $\lambda_n \to \lambda(n \to \infty)$. 令

$$z = \lambda x + (1-\lambda)y, y_n = \lambda_n x + (1-\lambda_n)y,$$

则 $y_n \to z(n \to \infty)$. 由 $f(x)$ 的下半连续性及 A 的定义知，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N \text{，有 } f(y_n) > f(z) - \varepsilon,$$

即 $f[\lambda x + (1-\lambda)y] < f[\lambda_n x + (1-\lambda_n)y] + \varepsilon \leqslant \lambda_n f(x) + (1-\lambda_n)f(y) + \varepsilon$

再令 $n \to \infty$ 并注意 ε 的任意性，就有 $f[\lambda x + (1-\lambda)y] \leqslant \lambda f(x) + (1-$

$\lambda)f(y)$，即函数 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数.

定理 2 还可以向下面所谓的几何凸函数加以推广.

定义 5　设函数 $f(x)$ 区间 $I\subset R^+$ 上有定义，称函数 $f(x)$ 为 I 上几何凸函数，如果

$$\forall x,y\in I,\forall\lambda\in[0,1],\text{有 } f(x^{\lambda}y^{1-\lambda})\leqslant f^{\lambda}(x)f^{1-\lambda}(y).$$

定义 6　设函数 $f(x)$ 在区间 $I\subset R^+$ 有定义，称函数 $f(x)$ 为 I 上的近似几何凸函数，如果

$$\exists\alpha\in(0,1),\forall x,y\in I,\text{有 } f(x^{\alpha}y^{1-\alpha})\leqslant f^{\alpha}(x)f^{1-\alpha}(y).$$

定理 3　若函数 $f(x)$ 是区间 $I\subset R^+$ 上的上(下)半连续函数，则 $f(x)$ 是区间 I 上的几何凸函数等价于 $f(x)$ 是区间 I 上的近似几何凸函数.

其证明需要类似的一个稠密性的引理，然后仿照定理 2，这里从略.

例 2　设 $f(x)$ 为 $[0,x]\subset[0,b)(\forall x\in[0,b))$ 上的可积函数.

(1) 若 $f(x)$ 为 $(0,b)$ 上的几何凸函数，则 $F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $(0,b)$ 上的几何凸函数；

(2) 设 $f(x)$ 为 $(0,b)$ 上的几何凸函数，则 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $(0,b)$ 上的几何凸函数

证明　(1) 因为 $F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $(0,b)$ 上连续函数，只需证

$$\forall x_1,x_2\in(0,b),\text{有 } F(\sqrt{x_1x_2})\leqslant\sqrt{F(x_1)F(x_2)}$$

根据定积分概念和 Cauchy 不等式，有

$$F(\sqrt{x_1x_2})=\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}\int_0^{\sqrt{x_1x_2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\sqrt{x_1x_2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\sqrt{\frac{k}{n}x_1\,\frac{k}{n}x_2}\right)\leqslant\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{f\left(\frac{k}{n}x_1\right)f\left(\frac{k}{n}x_2\right)}$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{x_1}\frac{x_1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}x_1\right)\frac{1}{x_2}\frac{x_2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}x_2\right)}=\sqrt{F(x_1)F(x_2)}$$

(2) 只需证 $\forall x_1,x_2\in(0,b)$，有 $F(\sqrt{x_1x_2})\leqslant\sqrt{F(x_1)F(x_2)}$

事实上，根据定积分概念和 Cauchy 不等式，

$$F(\sqrt{x_1x_2})=\int_0^{\sqrt{x_1x_2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{x_1x_2}}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\sqrt{x_1x_2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x_1x_2}}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\sqrt{\frac{k}{n}x_1\ \frac{k}{n}x_2}\right)\leqslant\frac{\sqrt{x_1x_2}}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{f\left(\frac{k}{n}x_1\right)f\left(\frac{k}{n}x_2\right)}$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{x_1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}x_1\right)\frac{x_2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}x_2\right)}=\sqrt{F(x_1)F(x_2)}.$$

除了几何凸函数,还有很多广义凸函数,可做类似的探究.

思考题答案

思考题 1.1 答案

1. **证明**:对 $\forall x, y \in A$,由 $|f(x) \pm g(x) - (f(y) \pm g(y))| \leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$ 及 $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leqslant |f(x)g(x) - g(x)f(y) + g(x)f(y) - f(y)g(y)| \leqslant N|f(x) - f(y)| + M|g(x) - g(y)|$ 可推得结论.

2. **证明**:$\forall x \in D$,有 $f(x) \leqslant \sup\limits_{x \in D}\{f(x)\}$,$g(x) \leqslant \sup\limits_{x \in D}\{g(x)\}$,则

$f(x) + g(x) \leqslant \sup\limits_{x \in D}\{f(x)\} + \sup\limits_{x \in D}\{g(x)\}$,故 $\sup\limits_{x \in D}\{f(x) + g(x)\} \leqslant \sup\limits_{x \in D}\{f(x)\} + \sup\limits_{x \in D}\{g(x)\}$.

又 $\sup\limits_{x \in D}\{g(x)\} = \sup\limits_{x \in D}\{g(x) + f(x) + (-f(x))\} \leqslant \sup\limits_{x \in D}\{g(x) + f(x)\} + \sup\limits_{x \in D}\{-f(x)\} = \sup\limits_{x \in D}\{g(x) + f(x)\} - \inf\limits_{x \in D}\{f(x)\}$,故 $\inf\limits_{x \in D}\{f(x)\} + \sup\limits_{x \in D}\{g(x)\} \leqslant \sup\limits_{x \in D}\{g(x) + f(x)\}$.

思考题 1.2 答案

1. **证明**:事实上,对 $\forall n \in N$,有 $a_n \leqslant b_n$.若不然,假设 $\exists n_0 \in N$,使得 $a_{n_0} > b_{n_0}$,则对 $\forall n > n_0$,就有 $a_n \geqslant a_{n_0} > b_{n_0} \geqslant b_n$,或 $a_n - b_n \geqslant a_{n_0} - b_{n_0} > 0$,这与 $\lim\limits_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0$ 矛盾.此时,$\{b_n\}$ 的每一项都是 $\{a_n\}$ 的上界,$\{a_n\}$ 的每一项都是 $\{b_n\}$ 的下界.根据单调有界定理及 $\lim\limits_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0$ 可得结论.

2. **证明**:首先 $a_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}} \leqslant \sqrt{a_n b_n} \leqslant \dfrac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1}$,$a_1 < b_1$,这说明 $a_n \leqslant b_n$,$n = 1, 2, \cdots$.其次,$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2b_n}{a_n + b_n} \geqslant 1$,$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{a_n + b_n}{2b_n} \leqslant 1$,这说明 $\{a_n\}$ 是增加的,$\{b_n\}$ 是减少的.设 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$,$\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$,则由 $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ 推得 $a = b$,从而 $\lim\limits_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0$.于是,$\{[a_n, b_n]\}$ 是一个闭区间套.(请读者求出这个闭区间

套的公共点吧)

3. 用有限覆盖定理,用法见例 1.5.1.

4. **证明**:令 $F(x)=f(x)-g(x), x\in[a,b], F(a)\geqslant 0, F(b)\leqslant 0$.

记对 $[a,b]$ 二等分得 $[a,\frac{a+b}{2}],[\frac{a+b}{2},b]$. 若 $F(\frac{a+b}{2})\geqslant 0$ 则记 $[\frac{a+b}{2},b]=[a_1,b_1]$,若 $F(\frac{a+b}{2})\leqslant 0$,则记 $[a,\frac{a+b}{2}]=[a_1,b_1]$.

对 $[a_1,b_1]$ 实施同样的步骤,如此下去,得到闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$,满足

$$F(a_n)\geqslant 0, F(b_n)\leqslant 0, n=1,2,\cdots$$

并有 $\xi\in[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$,则 $g(a_n)\leqslant f(a_n)\leqslant f(\xi)\leqslant f(b_n)\leqslant g(b_n)$.

令 $n\to\infty$,得 $g(\xi)\leqslant f(\xi)\leqslant g(\xi)$,即 $f(\xi)=g(\xi)$.

5. **证明**:由 $f'(x)>0$ 推知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 单调增加,从而 $\{x_n\}$ 单调. 为证 $\{x_n\}$ 有界,只需证 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界,事实上,$\forall x\in\mathbf{R}$, $|f(x)\leqslant|f(0)|+|f(x)-f(0)|=|f(0)|+|\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t|\leqslant|f(0)|+\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x\leqslant|f(0)|+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{1+x^2}\mathrm{d}x=|f(0)|+k\pi$.

思考题 1.3 答案

1. **证法一**($\varepsilon/3$ 法) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 可知,

$$\exists M>0, \forall n\in N_+, \text{有} |a_n|\leqslant M, |b_n|\leqslant M,$$

$\forall\varepsilon>0, \exists N_0\in N_+, \forall n>N_0$,有 $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{6M}, |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{6(|b|+1)}$.

固定 N_0,当 $n>2N_0$ 时,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}-ab\right| \\
\leqslant&\left|\frac{(a_1b_n-ab)+(a_2b_{n-1}-ab)+\cdots+(a_{N_0}b_{n-N_0+1}-ab)}{n}\right| \\
&+\left|\frac{(a_{N_0+1}b_{n-N_0}-ab)+\cdots+(a_{n-N_0}b_{N_0+1}-ab)}{n}\right| \\
&+\left|\frac{(a_{n-N_0+1}b_{N_0}-ab)+\cdots+(a_{n-1}b_2-ab)+(a_nb_1-ab)}{n}\right| \\
=&L_n+M_n+R_n.
\end{aligned}$$

其中

$$M_n =$$

$$\left|\frac{(a_{N_0+1}b_{n-N_0}-a_{N_0+1}b+a_{N_0+1}b-ab)+\cdots+(a_{n-N_0}b_{N_0+1}-a_{n-N_0}b+a_{n-N_0}b-ab)}{n}\right|$$

$$\leqslant \frac{|a_{N_0+1}|\,|b_{n-N_0}-b|+\cdots+|a_{n-N_0}|\,|b_{N_0+1}-b|}{n}$$

$$+\frac{|b|\,|a_{N_0+1}-a|+\cdots+|b|\,|a_{n-N_0}-a|}{n}$$

$$\leqslant M\frac{|b_{n-N_0}-b|+\cdots+|b_{N_0+1}-b|}{n}+|b|\frac{|a_{N_0+1}-a|+\cdots+|a_{n-N_0}-a|}{n}$$

$$\leqslant \frac{M(n-2N_0)}{n}\frac{\varepsilon}{6M}+\frac{|b|(n-2N_0)}{n}\frac{\varepsilon}{6(|b|+1)}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

由于 $0\leqslant L_n\leqslant\dfrac{|a_1b_n-ab|+|a_2b_{n-1}-ab|+\cdots+|a_{N_0}b_{n-N_0+1}-ab|}{n}$

$$\leqslant\frac{N_0(M^2+|ab|)}{n},$$

$$0\leqslant R_n\leqslant\frac{|a_{n-N_0+1}b_{N_0}-ab|+\cdots+|a_{n-1}b_2-ab|+|a_nb_1-ab|}{n}$$

$$\leqslant\frac{N_0(M^2+|ab|)}{n},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}L_n=\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$，

于是对上述 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in N_+$，$\forall n>N_1$，有 $L_n<\dfrac{\varepsilon}{3}$，$R_n<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

取 $N=\max\{N_0,N_1\}$，$\forall n>N$，

有 $\left|\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}-ab\right|\leqslant L_n+M_n+R_n<\varepsilon$，

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$.

证法二（利用重要极限）

$$\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}$$

$$=\frac{a_1(b_n-b+b)+a_2(b_{n-1}-b+b)+\cdots+a_n(b_1-b+b)}{n}$$

$$= \frac{a_1(b_n - b) + a_2(b_{n-1} - b) + \cdots + a_n(b_1 - b)}{n} + b\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$= L_n + R_n$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 可知，$\exists M > 0$，$\forall n \in N_+$，有 $|a_n| \leqslant M$，

故 $0 \leqslant |L_n| \leqslant M\dfrac{|b_n - b| + |b_{n-1} - b| + \cdots + |b_1 - b|}{n}$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 可知，$\lim\limits_{n\to\infty}|b_n - b| = 0$，根据前例知，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|b_n - b| + |b_{n-1} - b| + \cdots + |b_1 - b|}{n} = 0.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = 0$，同时 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty} b\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = ab$，

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} L_n + \lim\limits_{n\to\infty} R_n = ab$.

显然当取 $b_n \equiv 1$ 时上例就是例 1.3.4.

2. **证明**：(1) 将数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 分解成 k 个子列 $\{\dfrac{a_{kn}}{kn}\}$，$\{\dfrac{a_{kn+1}}{kn+1}\}$，$\cdots$，$\{\dfrac{a_{kn+k-1}}{kn+k-1}\}$.

令 $x_n = a_{kn+i}$，$y_n = kn + i$，$i = 0,1,\cdots,k-1$，则由 Stolz 定理知，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{kn+i}}{kn+i} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{k(n+1)+i} - a_{kn+i}}{[k(n+1)+i] - (kn+i)} =$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{kn+i+k} - a_{kn+i}}{k} = \dfrac{a}{k}$ 由数列与其子列在收敛性上的关系可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n} = \dfrac{a}{k}$.

(2) 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+k}}{a_n} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{a_{n+k}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_{n+k} - \ln a_n) = \ln a$.

这里规定 $a = 0$ 时 $\ln a = -\infty$，$a = +\infty$ 时 $\ln a = +\infty$，利用 1) 之结果有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln a_n}{n}$

$= \dfrac{\ln a}{k}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{a_n} = \ln\sqrt[k]{a}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln\sqrt[n]{a_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln\sqrt[k]{a}} = \sqrt[k]{a}$.

3. **解**：(1) 令 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$，$y_n = \ln n$，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = 1.$$

(2) 令 $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a^k}{k}$，$y_n = \dfrac{a^{n+1}}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{a^{n+2}}{n+1}-\dfrac{a^{n+1}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{na-(n+1)}=\frac{1}{a-1}.$$

(3) 令 $x_n=\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k, y_n=n^2$，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{(n+1)^2-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\ln\dfrac{C_{n+1}^k}{C_n^k}}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}[\ln(n+1)-\ln(n+1-k)]}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-\sum_{k=1}^{n+1}\ln k}{2n+1}$$

$$\xlongequal{\text{再用 Stolz 定理}}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\ln(n+2)-(n+1)\ln(n+1)-\ln(n+2)}{2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln\dfrac{n+2}{n+1}}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{2}=\frac{1}{2}.$$

4. **证明**：由已知可推得 $a_n>0$ 及 $a_{n+1}=\ln(1+a_n)<a_n$，即 $\{a_n\}$ 严格减少且有界. 根据单调有界定理 $\{a_n\}$ 收敛，设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，由迭代方程知 $a=\ln(1+a)$，解得 $a=0$. 根据定理 1.3.1 之推论，只需证明极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=2$. 事实上，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\ln(1+a_n)}{a_n-\ln(1+a_n)}=\lim_{t\to0}\frac{t\ln(1+t)}{t-\ln(1+t)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)+\dfrac{t}{1+t}}{1-\dfrac{1}{1+t}}=\lim_{t\to0}\frac{(1+t)\ln(1+t)+t}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left[(1+t)\frac{\ln(1+t)}{t}+1\right]=2.$$

5. **证明**：由已知可推得 $a_n>0$ 及 $a_{n+1}=\sin a_n<a_n$，即 $\{a_n\}$ 严格减少且有界. 根据单调有界定理 $\{a_n\}$ 收敛，由迭代方程知 $a=\sin a$，解得 $a=0$，从而 $\{a_n^2\}$ 严格减少且 $\lim_{n\to\infty}a_n^2=a$. 根据定理 1.3.1 之推论，只需证明极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2a_{n+1}^2}{a_n^2-a_{n+1}^2}=3$. 事实上，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2a_{n+1}^2}{a_n^2-a_{n+1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2\sin^2a_n}{a_n^2-\sin^2a_n}=\lim_{t\to0}\frac{t^2\sin^2t}{t^2-\sin^2t}=\lim_{t\to0}\frac{t^4}{(t-\sin t)(t+\sin t)}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t-\sin t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{t+\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{3t^2}{1-\cos t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\cos t}=3.$$

7. **证明**:(1) 对 $\forall\varepsilon>0$,由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格增加知,

$$f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)>0,f(x_0)-f(x_0-\varepsilon)>0.$$

对于 $\varepsilon'=\min\{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)>0,f(x_0)-f(x_0-\varepsilon)\}$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$ 知,

$\exists N>0,\forall n>N$,有 $f(x_0-\varepsilon)<f(x_0)-\varepsilon'<f(x_n)<f(x_0)+\varepsilon'<f(x_0+\varepsilon)$.

再由 $f(x)$ 严格增加得:$x_0-\varepsilon<x_n<x_0+\varepsilon$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

(2)(反证法)假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq x_0$,则 $\exists\varepsilon_0>0$,使得 $\{x_n\}$ 中有无穷多项落在 $U(x_0,\varepsilon_0)$ 之外,而这无穷多项作为有界点列,由致密性定理知,存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$,设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x'_0\in[a,b]$,这时 $x_0\neq x'_0$. 但由连续性知,$f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x'_0)$,这与 x_0 为唯一最小值点矛盾.

8. **解法一**(利用 L'hospital 法则)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\arctan x}{\pi}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\frac{2\arctan x}{\pi}}{\frac{1}{x}}}=e^{-\frac{2}{\pi}},$$

其中 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2\arctan x}{\pi}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-\frac{2}{\pi}.$$

解法二(利用重要极限)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\arctan x}{\pi}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\left(\frac{2\arctan x}{\pi}-1\right)\right)^{\frac{1}{\frac{2\arctan x}{\pi}-1}\left(\frac{2\arctan x}{\pi}-1\right)x}=e^{-\frac{2}{\pi}},$$

其中 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\arctan x}{\pi}-1\right)\cdot x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\arctan x}{\pi}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=-\frac{2}{\pi}.$$

9. **解**:根据方程 $y^2+xy+x^2-x=0$ 推得

$$(x-1)^2=x^2-2x+1=-y^2-xy-x+1=(1-y^2)-(xy+x)$$
$$=(1+y)(1-y-x)$$

于是$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{y(x)+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+y)(1-y-x)}{1+y}=\lim\limits_{x\to 1}(1-y-x)=1.$

在二阶可导的前提下，对方程 $y^2+xy+x^2-x=0$ 两端求关于 x 的导数

$2yy'+y+xy'+2x-1=0$，解得 $y'=\dfrac{1-2x-y}{2y+x}$（在点$(1,-1)$附近 $2y+x\neq 0$），$\lim\limits_{x\to 1}y'=0$，再对方程 $2yy'+y+xy'+2x-1=0$ 两端求关于 x 的导数，求得 $y''=-\dfrac{2(y'^2+y'+1)}{2y+x}$，由 L'Hospital 法则，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{y(x)+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{y'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{y''}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(2y+x)}{y'^2+y'+1}=1.$

思考题 1.4 答案

1. **证明**：只需证在区间 I 的内部的每一点存在左右导数（这蕴含着连续）.

事实上，对于区间 I 的内点 x_0，$\exists\,\delta>0$，使得$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset I$.

对 $\forall\,x\in(x_0-\delta,x_0)$，令 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. 取定的 $x_1\in(x_0,x_0+\delta)$，函数 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在$(x_0-\delta,x_0)$单调增加且 $\forall\,x\in(x_0-\delta,x_0)$，$F(x)\leqslant\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. 由函数的单调有界定理知，$f'_+(x_0)$ 存在，同理可证 $f'_-(x_0)$ 存在.（凸函数的刻划见第 3 章第 3 节）

2. **证明**：(1) 根据单侧函数极限的单调有界定理，对于$[a,b]$上的增函数 $f(x)$，其在$[a,b]$上每一点处的单侧极限是存在的，因此增函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上如果有间断点，那么只能是第一类间断点（间断点若为端点 a 或 b，则为可去间断点，若间断点在$[a,b]$内部，则为跳跃间断点）.

(2)（反证法）假设 $f(x)$ 在$[a,b]$不连续，不妨设 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处间断，则由(1)知，x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点，且有

$$f(x_0-0)<f(x_0+0),\ f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0)$$

如此一来，因值域为$[f(a),f(b)]$，所以对于 $\eta\in(f(x_0-0),f(x_0+0))\subseteq[f(a),f(b)]$，且 $\eta\neq f(x_0)$，存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\eta$，显然 $\xi\neq x_0$，不妨设 $\xi<x_0$. 根据函数的单调性，必有 $\eta=f(\xi)\leqslant f(x_0-0)$，这与 $\eta\in(f(x_0-0),f(x_0+0))$ 矛盾.（该题给出了单调函数的连续性）

3. **证法一** 函数 $M(x)=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant x}\{f(t)\}$ 为 $[a,b]$ 上的增函数. $M(a)=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant a}\{f(t)\}=f(a)$, $M(b)=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\{f(t)\}=f(x_0)$, $x_0\in[a,b]$, 不妨设 $f(a)<f(x_0)$, 由上题(2)知, 只需证 $M(x)$ 的值域为 $[f(a),f(x_0)]$. 对 $\forall\eta\in(f(a),f(x_0))$, $\exists\xi\in(a,x_0)$, 使得 $f(\xi)=\eta$.

记 $\xi_0=\inf\{\xi\,|\,\xi\in(a,x_0), f(\xi)=\eta\}$, 则 $\forall n\in N_+$, $\exists\xi_n\in(a,x_0)$, 使得 $\xi_0\leqslant\xi_n<\xi_0+\dfrac{1}{n}$, 且 $f(\xi_n)=\eta$. 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续得, $\eta=\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=f(\xi_0)$. 即 $f(\xi_0)=\eta$, 进而 $\xi_0\in(a,x_0)$.

下证 $M(\xi_0)=\eta$. 首先 $M(\xi_0)=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant\xi_0}\{f(t)\}\geqslant f(\xi_0)=\eta$, 即 $M(\xi_0)\geqslant\eta$.

其次, 如果 $M(\xi_0)>\eta$, 则 $\exists t_0\in[a,\xi_0]$, 使得 $f(t_0)>\eta$, 又 $\eta>f(a)$, 从而 $t_0\in(a,\xi_0)$. 如此 η 严格介于 $f(a)$ 和 $f(t_0)$ 之间, 从而 $\exists\xi'\in(a,t_0)$, 使得 $f(\xi')=\eta$, 再注意到 $\xi'<t_0<\xi_0$, 这与 ξ_0 的定义矛盾. 故 $M(\xi_0)>\eta$ 是不可能的, 最终证得 $M(\xi_0)=\eta$, $M(x)$ 的值域为 $[f(a),f(x_0)]$.

证法二 函数 $M(x)=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant x}\{f(t)\}$ 为 $[a,b]$ 上的增函数, 其在 $[a,b]$ 上每一点处的单侧极限是存在的, 不妨设 $x_0\in(a,b)$, 则有 $M(x_0-0)\leqslant M(x_0)\leqslant M(x_0+0)$, 只需证还有 $M(x_0+0)\leqslant M(x_0)\leqslant M(x_0-0)$ 成立.

(1) $M(x_0)\leqslant M(x_0-0)$.

对 $\forall x\in[a,x_0)$, $f(x)\leqslant\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant x}\{f(t)\}=M(x)\leqslant M(x_0-0)$, $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\leqslant M(x_0-0)$, 即 $\forall x\in[a,x_0]$, $f(x)\leqslant M(x_0-0)$, 从而 $\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant x_0}\{f(t)\}\leqslant M(x_0-0)$, 即 $M(x_0)\leqslant M(x_0-0)$.

(2) $M(x_0+0)\leqslant M(x_0)$.

因函数 $f(x)$ 在 x_0 连续, 故对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x\in[x_0,x_0+\delta)$, 有 $f(x)<f(x_0)+\varepsilon$. 从而对 $\forall h: 0<h<\delta$, $\sup\limits_{x_0\leqslant x\leqslant x_0+h}\{f(x)\}\leqslant f(x_0)+\varepsilon\leqslant M(x_0)+\varepsilon$

由例 1.1.1(3) 知,

$M(x_0+h)=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant x_0+h}\{f(x)\}=\max\{\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant x_0}\{f(x)\}, \sup\limits_{x_0\leqslant x\leqslant x_0+h}\{f(x)\}\}\leqslant M(x_0)+\varepsilon$. 令 $h,\varepsilon\to0^+$, 就有 $M(x_0+0)\leqslant M(x_0)$. (该题是利用闭区间上连续函数的最值性构造单调连续函数)

5. **证明**: 任取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$, 由 $e^x f(x)$ 与 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调性

推得：

$x > x_0$ 时，$e^{x_0-x}f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0)$，推得 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，

$x < x_0$ 时，$f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant e^{x_0-x}f(x_0)$，推得 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，

所以 $f(x)$ 在 x_0 连续(进而在$(-\infty,+\infty)$上连续).

思考题 1.5 答案

1. **解**：当 $|x| \geqslant 1$ 时，$|f'(x)| = \frac{1}{3}|x|^{-\frac{2}{3}} \leqslant \frac{1}{3}$，由此对 $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, -1]$ 或 $\forall x_1, x_2 \in [1, +\infty)$，有 $|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2| \leqslant \frac{1}{3}|x_1 - x_2|$，因此 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在$(-\infty, -1]$和$[1, +\infty)$分别一致连续，又 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在$[-1,1]$一致连续，从而 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在$(-\infty, +\infty)$一致连续.

3. **证明**：(1) 可证 $f(a+0)$、$f(b-0)$ 存在.

(2) $f(x)$ 在(a,b)是连续的，下证 $f(a+0)$、$f(b-0)$ 存在.

因为 $f(x)$ 有上界，故 $\exists M_1 > 0, \forall x \in (a,b), f(x) \leqslant M_1$.

对 $\forall x_0, x_1, x \in (a,b)$ 且 $x_0 < x_1 < x$，函数 $F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 在(x_1, b)单调增加，又因为

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{M_1 - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{M_1 - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \forall x \in (x_1, b),$$

从而 $F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 在(x_1, b)有上界，根据函数单侧极限的单调有界定理知，$F(b-0)$ 存在. 于是就有

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0)\right] = F(b-0)(b - x_0) + f(x_0)$$

即 $f(b-0)$ 存在. 同理可证 $f(a+0)$ 存在.

(3) 提示：利用 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)$ 的存在性，推出导函数在端点的局部有界性，进而得到端点的局部一致连续.

4. **证明**：(反证法) 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$，则

$\exists \varepsilon_0 > 0$ 以及严格增加的无穷大数列$\{x_n\}$，使得 $|f(x_n)| > \varepsilon_0$.

令 $z_n = x_n - [x_n]$，则 $0 \leqslant z_n < 1$，即 $\{z_n\}$ 有界，故存在收敛子列，为方便起见，设 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$，则有

$$0 = \lim_{n\to\infty}(z_n - x_0) = \lim_{n\to\infty}(x_n - [x_n] - x_0) = \lim_{n\to\infty}[x_n - ([x_n] + x_0)].$$

令 $y_n = [x_n] + x_0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. 因 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续，故 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n) - f(y_n)] = 0$ 又因对 $\forall x \in [0, +\infty)$，都有数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n+x) = 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f([x_n] + x_0) = 0$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}[(f(x_n) - f(y_n)) + f(y_n)] = 0$，这与假设矛盾.（该题改为正向证明，只需任取 $\{x_n\} \in [0, +\infty)$，且 $x_n \to +\infty$，最后根据 Heine 定理）.

5. **证明**：（反证法）假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$，则

$\exists \varepsilon_0 > 0$ 以及严格增加的无穷大数列 $\{x_n\}$，使得 $|f(x_n)| > \varepsilon_0$

对上述 $\varepsilon_0 > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$，且 $|x_1 - x_2| < \delta$，有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ 一方面，因为 $\left|x_n - \left[\frac{x_n}{\delta}\right]\delta\right| = \delta\left|\frac{x_n}{\delta} - \left[\frac{x_n}{\delta}\right]\right| < \delta$，所以

$\left|f(x_n) - f(\left[\frac{x_n}{\delta}\right]\delta)\right| < \frac{\varepsilon_0}{2}$，$\forall n \in N_+$.

从而 $\left|f(\left[\frac{x_n}{\delta}\right]\delta)\right| \geqslant |f(x_n)| - \left|f(x_n) - f(\left[\frac{x_n}{\delta}\right])\right| > \frac{\varepsilon_0}{2}$.

另一方面，因为已知对 $\forall x > 0$，都有数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(nx) = 0$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty} f(\left[\frac{x_n}{\delta}\right]\delta) = 0$. 两方面矛盾.

思考题 1.6 答案

2. **答案**：(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^a + y^a}{x^2 + y^2} = 0$；(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

3. **证明**：因 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}} \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4} = 0$，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=x}} \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^4}{x^4 + x^4} = \dfrac{1}{2}$，故极限(1) 不存在；

因 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx^3}} \dfrac{x^3y}{x^6 + y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx^3}} \dfrac{kx^6}{x^6 + k^2y^6} = \dfrac{k}{1 + k^2}$，故极限(2) 不存在；

因 $\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y=\sqrt{x}}} \dfrac{x^6y^{10}}{(x^3 + y^6)^4} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^{11}}{2^4x^{12}} = +\infty$，故极限(3) 不存在.

4. **证明**：任取$(x,y),(x_0,y_0)\in D$，

从$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|$
$\leqslant L|y-y_0|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|$ 可以想到思路：

因$f(x,y_0)$在x_0处连续，故$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，

当$|x-x_0|<\delta_1$时，有$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

当$|y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2L}$时，有$L|y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2}$.

由此取$\delta=\min\{\delta_1,\frac{\varepsilon}{2L}\}$，当$|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$时，就有$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$. 即$f(x,y)$在$D$上连续.

注 这里条件"$\forall(x,y_1),(x,y_2)\in D,\exists L>0$，使得$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|$"可以减弱为"$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall(x,y)\in D$且$|y-y_0|<\delta$时，有$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$".

思考题 2.1 答案

1. (1) **证明**：只需注意到

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}+(-1)^{n+2}\frac{1}{n+2}\cdots+(-1)^{n+p}\frac{1}{n+p}\right|$$
$$=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}\text{ 即可证出.}$$

(2) **证明**：数列$\{a_n\}$一定是单调递减的，从而$na_{2n}\leqslant a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}$，

又级数$\sum a_n$收敛，故$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall n>N$，及$p=n$，有

$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}<\frac{\varepsilon}{2}$，进而$2na_{2n}<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}2na_{2n}=0$.

又$0\leqslant(2n+1)a_{2n+1}\leqslant(2n+1)a_{2n}=\frac{2n+1}{2n}2na_{2n}\to0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1}=0$. 综上$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$

(3) **证明**：由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$都收敛及 Cauchy 收敛准则，推知$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall n>N,\forall p\in N_+$，同时有$-\varepsilon<a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}<\varepsilon,-\varepsilon<c_{n+1}$

$+ c_{n+2} + \cdots + c_{n+p} < \varepsilon$. 又 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n (n = 1,2,\cdots)$，故 $-\varepsilon < b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p} < \varepsilon$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛.

另外的证法：因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛及 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n (n = 1,2,\cdots)$，推知 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 收敛及 $b_n - a_n \leqslant c_n - a_n$，由比较判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛，

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} [(b_n - a_n) + a_n]$ 收敛.

(4) **证明**：设级数 $\sum a_n$ 的部分和函数列为 $\{S_n\}$. 注意到对 $\forall m, p \in N_+$，有

$$\begin{aligned}&|a_{m+1}b_{m+1} + a_{m+2}b_{m+2} + \cdots + a_{m+p}b_{m+p}|\\ =&|b_{m+1}(S_{m+1} - S_m) + b_{m+2}(S_{m+2} - S_{m+1}) + \cdots + b_{m+p}(S_{m+p} - S_{m+p-1})|\\ =&|S_{m+1}(b_{m+1} - b_{m+2}) + S_{m+2}(b_{m+2} - b_{m+3}) + \cdots + S_{m+p-1}(b_{m+p-1} - b_{m+p}) +\end{aligned}$$
$b_{m+p}S_{m+p} - b_{m+1}S_m| \leqslant |S_{m+1}||b_{m+1} - b_{m+2}| + |S_{m+2}||b_{m+2} - b_{m+3}| + \cdots + |S_{m+p-1}||b_{m+p-1} - b_{m+p}| + |b_{m+p}||S_{m+p} - S_m| + |b_{m+p} - b_{m+1}||S_m|$.

记 $I_1 = |S_{m+1}||b_{m+1} - b_{m+2}| + |S_{m+2}||b_{m+2} - b_{m+3}| + \cdots + |S_{m+p-1}||b_{m+p-1} - b_{m+p}|$，$I_2 = |b_{m+p}||S_{m+p} - S_m|$，$I_3 = |b_{m+p} - b_{m+1}||S_m|$，

由级数 $\sum a_n$ 收敛，$\sum (b_{n+1} - b_n)$ 绝对收敛，可以推出 $\{S_n\}$、$\{b_n\}$ 收敛且有界，从而

$$\exists M > 0, \forall n \in N_+，有 |S_n| \leqslant M, |b_n| \leqslant M,$$

由级数 $\sum |b_{n+1} - b_n|$、$\sum a_n$ 及数列 $\{b_n\}$ 收敛的 Cauchy 收敛准则推知，

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall m > N, \forall p \in N_+$，有

$|b_{m+1} - b_{m+2}| + |b_{m+2} - b_{m+3}| + \cdots + |b_{m+p-1} - b_{m+p}| < \varepsilon$（推得 $I_1 < M\varepsilon$），

$|S_{m+p} - S_m| < \varepsilon$（推得 $I_2 < M\varepsilon$），

$|b_{m+p} - b_{m+1}| < \varepsilon$（推得 $I_3 < M\varepsilon$），

于是，$\forall m > N, \forall p \in N_+$，有 $|a_{m+1}b_{m+1} + a_{m+2}b_{m+2} + \cdots + a_{m+p}b_{m+p}| < 3M\varepsilon$，故级数 $\sum a_n b_n$ 收敛.

3. 仿照例 2.1.6 中 $f(x) \geqslant 0$ 的证明，请读者用反证法自证之.

4. **证明**：对 $\forall u > a$，由分部积分法知，

$$\int_a^u xf'(x)\mathrm{d}x = uf(u) - af(a) - \int_a^u f(x)\mathrm{d}x \text{ 或}$$

$$\int_a^u f(x)\mathrm{d}x = uf(u) - af(a) - \int_a^u xf'(x)\mathrm{d}x$$

(1) 当$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，因还有 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 递减，根据命题 1，就有 $\lim\limits_{u\to+\infty} uf(u)=0$，从而$\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{u\to+\infty}(uf(u)-af(a)-\int_a^u f(x)\mathrm{d}x)=-af(a)-\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即$\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 反之，当$\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，

注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 及 $f'(x)\leqslant 0, x\in[a,+\infty)$，根据例 2.1.7，有 $\lim\limits_{u\to+\infty} uf(u)=0$，从而$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{u\to+\infty}(uf(u)-af(a)-\int_a^u xf'(x)\mathrm{d}x)=-af(a)-\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$. 即$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

5. **证明**：事实上，当 $f(x)$ 是$[a,+\infty)$ 上的凸函数时，要么 $f(x)$ 是$[a,+\infty)$ 上的递减函数，要么会存在 $c>a$，$f(x)$ 是$[c,+\infty)$ 上的(严格) 递增函数. 事实上

如果 $f(x)$ 是$[a,+\infty)$ 上的递减函数，则证毕.

如果 $f(x)$ 不是$[a,+\infty)$ 上的递减函数，则 $\exists b,c\in[a,+\infty)$，$b<c$，使得 $f(b)<f(c)$.

任取 $x_1,x_2\in[c,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则由凸函数定义得：

$$0<\frac{f(c)-f(b)}{c-b}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\text{，从而 } f(x_1)<f(x_2)\text{，即}$$

$f(x)$ 是$[c,+\infty)(c>a)$ 上的(严格) 递增函数.

又$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，根据例 2.1.6，就有 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

思考题 2.2 答案

1. **证法一**(用一致收敛定义的否定叙述)

首先 $\forall x\in[0,1]$，$\lim\limits_{n\to\infty} nx(1-x)^n=0$.

再由伯努利不等式知，$\forall n\in N$，$\forall x\in[0,1]$，$|f_n(x)-f(x)|=nx(1-x)^n \geqslant nx(1-nx)$，

于是 $\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{4}, \forall N \in N_+, \exists n_0 > N, \exists x_0 = \frac{1}{2n_0}$,有

$$|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \geqslant n_0 x_0 (1 - n_0 x_0) = \frac{1}{4} = \varepsilon_0,$$

故函数列$\{nx(1-x)^n\}$在$[0,1]$非一致收敛.

证法二(用确界形式)

因$|f_n(x) - f(x)| = nx(1-x)^n$,可以利用导数具体求出连续函数$g(x) = nx(1-x)^n$在$[0,1]$的最大值($n$暂时固定)为$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$,于是

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{e} \neq 0.$$

或者,借助于$|f_n(x) - f(x)| = nx(1-x)^n \geqslant nx(1-nx)$,估计

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sup_{x\in[0,1]} nx(1-nx) \geqslant n\cdot\frac{1}{2n}\cdot\left(1 - n\cdot\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{4},$$

故函数列$\{nx(1-x)^n\}$在$[0,1]$非一致收敛.

2. **证明**:(1) 令 $f(x) = e^{-x}, x \in [0, +\infty), g(u) = u, u \in (0, +\infty)$.

(2) 令 $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in [0, +\infty)\left(f(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1\right), g(u) = u^2, u \in (0, +\infty)$.

(3) $\int_0^{+\infty} u^{-xu} u\ln u\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-xu\ln u} u\ln u\,dx$,令

$$f(x) = e^{-x}, x \in [0, +\infty), g(u) = u\ln u, u \in (1, +\infty).$$

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{(u-a)(b-u)}{(b-u)^2 + (u-a)^2 x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{u-a}{b-a}}{1 + \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^2 x^2} dx$,令

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [0, +\infty), g(u) = \frac{u-a}{b-u}, u \in (a,b), \lim_{u\to a^+} g(u) = 0, \lim_{u\to b^-} g(u) = +\infty$.

3. 仿照例 2.2.6 证之.

思考题 2.3 答案

1. **证明**:类似于例 2.3.5,其证明关键在于

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}[u_k(x)-u_k(x_0)]+\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_0)\right|$$

$$=\sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k(x)-u_k(x_0)|+\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_0)\right|\leqslant(b-a)\sum_{k=n+1}^{n+p}M_k+\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_0)\right|.$$

2. **证明**:因为$\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$的部分和函数列$\{B_n(x)\}$在$[a,b]$一致有界,故

$$\exists M>0,\forall n\in N_+,\forall x\in[a,b],\text{有}\left|\sum_{k=1}^{n}u'_k(x)\right|\leqslant M,$$

进而对$\forall n\in N_+,\forall p\in N_+,\left|\sum_{k=n}^{n+p}u'_k(x)\right|\leqslant 2M$. 对$\forall\varepsilon>0$,将闭区间$[a,b]T$等分:$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{T-1}<x_T=b$,使得$\frac{b-a}{T}<\varepsilon$. 因为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$收敛,故对上述$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall n>N,\forall p\in N_+,i=1,2,\cdots,T-1$有$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_i)\right|<\varepsilon$.

注意到$\forall x\in[a,b]$,存在$[x_{i-1},x_i]$,$1\leqslant i\leqslant T$,使得$x\in[x_{i-1},x_i]$,于是$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall n>N,\forall p\in N_+,\forall x\in[a,b]$,有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}[u_k(x)-u_k(x_i)]+\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_i)\right|$$

$$=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u'_k(\xi_x)(x-x_i)+\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_i)\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u'_k(\xi_x)\right||x-x_i|+\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_i)\right|$$

$$\leqslant 2M\varepsilon+\varepsilon=(2M+1)\varepsilon.$$

即$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$一致收敛.

3. **证明**:因为$\forall n\in N_+$,函数$u_n(x)$在区间I有界,故$\exists M_n>0$,对$\forall x\in I$,有$|u_n(x)|\leqslant M_n$.

因为函数列$\{u_n(x)\}$在区间I一致收敛,根据 Cauchy 一致收敛准则,

对于$\varepsilon=1,\exists N\in N_+,\forall n,m\geqslant N,\forall x\in I$,有$|u_n(x)-u_m(x)|<1$.
取定$m=N$,则对$\forall n\geqslant N,\forall x\in I$,有$|u_n(x)-u_N(x)|<1$,进而
$|u_n(x)|=|u_n(x)-u_N(x)+u_N(x)|\leqslant|u_n(x)-u_N(x)|+|u_N(x)|<1+M_N$.

取 $M = \max\{M_1, M_2, \cdots, M_{N-1}, 1+M_N\}$，则 $\forall n \in N_+, \forall x \in I, |u_n(x)| \leqslant M$，即 $\{u_n(x)\}$ 在区间 I 一致有界.

4. **证明**：由条件可推知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，由闭区间连续函数的有界性及第 3 题结论推知 $\{u_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 一致有界及 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，从而 $\exists M > 0$，$\forall n \in N_+, \forall x \in [a,b]$，同时有 $|f_n(x)| \leqslant M$ 和 $|f(x) \leqslant M$. 由 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$，连续，推知 $g(x)$ 在 $[-M,M]$ 一致连续，即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [-M, M], |x-y| < \delta$，有 $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

再由 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $f(x)$ 推知对上述 $\delta > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, \forall x \in [a,b]$，有 $|f_n(x) - f(x)| < \delta$，进而 $|g[f_n(x)] - g[f(x)]| < \varepsilon$，故 $\{g[f_n(x)]\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $g[f(x)]$.

5. **证明**：由第 3 题结论和条件(1) 知，函数列 $\{u_n(x)\}$ 在区间 I 一致有界，同时，$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(x)|$ 的部分和函数列在区间 I 一致有界，于是，

$$\exists M > 0, \forall n \in N_+, \forall x \in I, \text{同时有} |u_n(x)| \leqslant M \text{ 和} \sum_{k=1}^{n} |v_n(x)| \leqslant M.$$

因为函数列 $\{u_n(x)\}$ 在区间 I 一致收敛以及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在区间 I 一致收敛，于是，$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, \forall p \in N_+, \forall x \in I$，同时有

$$|u_{n+p}(x) - u_n(x)| < \varepsilon \text{ 和} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \right| < \varepsilon,$$

从而，$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) v_k(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) v_k(x) \right|$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x)| \, |u_k(x) - u_n(x)| + |u_n(x)| \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \right|$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x)| + |u_n(x)| \varepsilon \leqslant 2M\varepsilon$$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ 在区间 I 一致收敛.

思考题 2.4 答案

1. **答案**：(1) $S(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1-x}{x} \ln(1-x), & x \neq 0, 1, x \in [-1, 1] \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$；

(2)$S(x)=\dfrac{x+x^2}{(1-x)^4}$.

2. **证明**:由已知条件知,$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

要证 $f(x)\equiv 0$,$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,只需证 $\forall n\in N_+$,$f^{(n)}(0)=0$.

由 $\forall n\in N_+$,有 $f(\frac{1}{n})=0$ 及 $f(x)$ 在 0 点连续推知,$f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=0$.

由 $f(\frac{1}{n})=f(\frac{1}{n+1})=0$ 及 Rolle 定理知,$\exists\xi_n\in(\frac{1}{n},\frac{1}{n+1})$,使得 $f'(\xi_n)=0$,$\xi_n\to 0(n\to 0)$,由 $f'(x)$ 在 0 点连续推知,$f'(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f'(\xi_n)=0$.

由 $f'(\xi_n)=f'(\xi_{n+1})=0$ 及 Rolle 定理知,$\exists\eta_n\in(\xi_n,\xi_{n+1})$,使得 $f''(\eta_n)=0$.

由 $f''(x)$ 在 0 点连续推知,$f''(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f''(\eta_n)=0$

由此下去,可知 $\forall n\in N_+$,$f^{(n)}(0)=0$.

思考题 3.1 答案

1. **证明**:只需证明 $f(x)$ 在$[a,b]$的内部取得最大值、最小值之一. 不妨设 $f(b)>0$,$f'(b)<0$,$f(a)\leqslant 0$,则由极限保号性知,$\exists c\in(a,b)$,使得 $f(c)>f(b)>0$,而同时 $f(c)>f(a)$,故 $f(x)$ 在$[a,b]$的内部取得最大值.

2. **证明**:设实数 k 满足等式

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(c)}{(c-b)(c-a)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}=\frac{1}{2}k,$$

往证 $k=f''(\xi)$,为此构造函数 $F(x)=f(a)(x-c)+f(c)(a-x)+f(x)(c-a)-\frac{1}{2}k(a-x)(a-c)(x-c)$,

则 $F(a)=F(c)=F(b)=0$,用两次 Rolle 定理可推得结果.

4. **证明**:(1) 将 $f(b)$,$f(a)$ 分别在$\frac{a+b}{2}$处展开,相加.

(2) 将 $f(b)$,$f(a)$ 分别在$\frac{a+b}{2}$处展开,相减.

(3) 将 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$分别在 a,b 处展开,相加.

(4) 将 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$分别在 a,b 处展开,相减.

5. **证明**:将 $f(x+h),f(x-h)$ 在 x 处展开(其中 $x\in R,h>0$):

$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2,f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2$,两式相减:$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{1}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_1)]h^2$,进而

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{1}{4}[f''(\xi_1)-f''(\xi_1)]h,$$

$$|f'(x)|=\frac{|f(x+h)|+|f(x-h)|}{2h}+\frac{1}{4}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_1)|]h\leqslant\frac{M_0}{h}+$$

$\frac{1}{2}M_2h,\forall x\in R,\forall h>0$. 再由$\frac{M_0}{h}+\frac{1}{2}M_2h\geqslant\sqrt{2M_0M_2}\Rightarrow|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$,$\forall x\in R\Rightarrow M_1^2\leqslant 2M_0M_2$.

6. **证明**:(1) $\frac{m_1}{m_1+m_2}$ 作为介于0,1之间的数,在区间$[0,\frac{m_1}{m_1+m_2}]$,$[\frac{m_1}{m_1+m_2},1]$分别应用 Lagrange 中值定理可得到结论;

(2) $\frac{m_1}{m_1+m_2}$ 作为介于 $f(0),f(1)$ 之间的数,$\exists c\in(0,1)$,使得 $f(c)=\frac{m_1}{m_1+m_2}$,在区间$[0,c]$,$[c,1]$ 分别应用 Lagrange 中值定理可得到结论.

思考题 3.2 答案

5. **证明**:必要性　函数 $f(x)$ 在区间 I 一致可微,即函数 $f(x)$ 在区间 I 可微,且 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,y\in I,0<|x-y|<\delta$,有$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-f'(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$,$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-f'(y)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$,于是 $\forall x,y\in I,0<|x-y|<\delta$,有 $|f'(x)-f'(y)|\leqslant\left|f'(x)-\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|+\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-f'(y)\right|<\varepsilon$,即 $f'(x)$ 在区间 I 一致连续.

充分性　$f'(x)$ 在区间 I 一致连续,即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,y\in I,|x-y|<\delta$,有 $|f'(x)-f'(y)|<\varepsilon$,于是 $\forall x,y\in I,0<|x-y|<\delta$,有

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-f'(x)\right|=|f'(\xi)-f'(x)|<\varepsilon(|\xi-x|<|x-y|<\delta),$$

即函数 $f(x)$ 在区间 I 一致可微.

思考题 3.3 答案

1. **证明**:不妨设 $y \geqslant x$,不等式两端同时除以 x,所证不等式等价于 $(1+a^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} > (1+a^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$,其中 $a=\dfrac{y}{x}\geqslant 1$. 再取自然对数有 $\dfrac{1}{\alpha}\ln(1+a^{\alpha}) > \dfrac{1}{\beta}\ln(1+a^{\beta})$,于是问题归结为往证函数 $f(t)=\dfrac{1}{t}\ln(1+a^{t})$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格减少.

而 $f'(t)=\dfrac{ta^{t}\ln a-(1+a^{t})\ln(1+a^{t})}{t^{2}(1+a^{t})}=\dfrac{a^{t}\ln a^{t}-(1+a^{t})\ln(1+a^{t})}{t^{2}(1+a^{t})}$,

由于 $a^{t}\ln a^{t}<(1+a^{t})\ln(1+a^{t})(a\geqslant 1,t>0)$,故 $f'(t)<0$.

2. 提示 $\left(\dfrac{a+1}{b+1}\right)^{b+1}\geqslant\left(\dfrac{a}{b}\right)^{b}\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{b}{b+1}\cdot\dfrac{a}{b}\right)^{b+1}\geqslant\left(\dfrac{a}{b}\right)^{b}$

$$\Leftrightarrow(b+1)\ln\left(\frac{1}{b+1}+\frac{b}{b+1}\cdot\frac{a}{b}\right)\geqslant b\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ln\left(\frac{1}{b+1}+\frac{b}{b+1}\cdot\frac{a}{b}\right)\geqslant\frac{1}{b+1}\ln 1+\frac{b}{b+1}\ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

3. **解**:① $f'(x)=\ln x+1$, $0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时 $f'(x)<0$, $x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时 $f'(x)>0$,所以 $f(x)=x\ln x$ 在 $(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}})$ 严格减少,在 $(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$ 严格增加.

当 $b>a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 及 $0<b<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时,有 $b\ln b>a\ln a$ 或 $b^{b}>a^{a}$.

② 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$, $f(x)=x\ln x$ 为 $(0,+\infty)$ 上的(严格)凸函数,从而任意 $a,b>0$,任意 $\lambda\in(0,1)$,有 $(\lambda a+(1-\lambda)b)\ln(\lambda a+(1-\lambda)b)\leqslant\lambda a\ln a+(1-\lambda)\ln b$. 当取 $\lambda=\dfrac{1}{2}$,且 $a\neq b$ 时,就有 $\dfrac{a+b}{2}\ln\dfrac{a+b}{2}<\dfrac{a\ln a+b\ln b}{2}$ 或 $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{a+b}<a^{a}b^{b}$.

思考题 3.4 答案

1. **答案**: $\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^{2}+\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^{2}=0$;

2. **答案**：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}=0$；

3. **答案**：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r}=0$；

4. **答案**：$\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$；

5. **答案**：$w_u=0$；

6. **答案**：$\mathrm{d}z=\dfrac{z}{z+x}\mathrm{d}x+\dfrac{z^2}{y(z+x)}\mathrm{d}y$.

7. **答案**：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{x+3v^3}{9u^2v^2-xy}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{xu+3v^2}{9u^2v^2-xy}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{3u^2+vy}{9u^2v^2-xy}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{3u^2+y}{9u^2v^2-xy}$.

思考题 4.1 答案

2. **答案**：$\dfrac{1}{4}\sec^3 x\tan x+\dfrac{3}{8}\sec x\tan x+\dfrac{3}{8}\ln|\sec x+\tan x|+C$.

3. **解**：采用特殊介点法求$\displaystyle\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x^m}(m\geqslant 2,b>a>0)$，$\displaystyle\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x^m}=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\xi_k^m}\Delta x_k$，特取介点 $\xi_k=\left(\dfrac{(m-1)x_{k-1}^{m-1}x_k^{m-1}}{x_k^{m-2}+x_k^{m-3}x_{k-1}+\cdots+x_{k-1}^{m-2}}\right)^{\frac{1}{m}}(k=1,2,\cdots,n)$，则有

$$x_{k-1}\leqslant\left(\frac{(m-1)x_{k-1}^{m-1}x_k^{m-1}}{x_k^{m-2}+x_k^{m-3}x_{k-1}+\cdots+x_{k-1}^{m-2}}\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant x_k,$$

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x^m}&=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k^{m-2}+x_k^{m-3}x_{k-1}+\cdots+x_{k-1}^{m-2})(x_k-x_{k-1})}{(m-1)x_{k-1}^{m-1}x_k^{m-1}}\\&=\lim_{\|T\|\to 0}\frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{m-1}-x_{k-1}^{m-1}}{x_{k-1}^{m-1}x_k^{m-1}}=\lim_{\|T\|\to 0}\frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{k-1}^{m-1}}-\frac{1}{x_k^{m-1}}\right)\\&=\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{a^{m-1}}-\frac{1}{b^{m-1}}\right).\end{aligned}$$

4. **答案**：(1) $\dfrac{\pi^2}{4}$；(2) $\dfrac{a}{2}\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}(\arctan\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}-\arctan\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}})$.

思考题 4.2 答案

1. **证明**：因 $f(x)$ 为$[a,b]$上的凸函数，对 $f(x)$ 在$\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$分别

应用 Hadamard 不等式得：

$$f\left(a+\frac{b-a}{4}\right)\leqslant\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(\frac{a+b}{2})}{2},$$

$$f\left(b-\frac{b-a}{4}\right)\leqslant\frac{2}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(b)+f(\frac{a+b}{2})}{2},$$

两式对应相加整理得到要证不等式.

2. **证明**：当$\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x=0$时，由例 4.1.16 可知，$g(x)=0,x\in[a,b]$，此时结论成立.

当$\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x>0$时，对 $\forall\lambda\in R$，有

$0\leqslant\int_a^b\left(|f(x)-\lambda|g(x)\right)^2\mathrm{d}x=\lambda^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x-2\lambda\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$，故判别式 $\Delta\leqslant 0$，由此整理即得要证不等式.

3. **证明**：令 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t,x\in[0,1],F(0)=0$，只需证 $F(x)$ 在$[0,1]$递增.

$$F'(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right].$$

令 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x),x\in[0,1]$，则 $G(0)=0,G'(x)=2f(x)[1-f'(x)]$，由已知条件可推知，在$[0,1]$上有 $f(x)\geqslant 0,G'(x)\geqslant 0$，进而 $G(x)\geqslant 0$，$F'(x)\geqslant 0$，故 $F(x)$ 在$[0,1]$递增.

4. **证明**：令 $F(x)=m\int_a^x g(t)\mathrm{d}t+M\int_x^b g(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在$[a,b]$连续，且

$$F(a)=M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,F(b)=m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

又 $m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，由介值性定理知，

$\exists\xi\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=F(\xi)=m\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+M\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$

同理可证 $\exists\eta\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=M\int_a^\eta g(x)\mathrm{d}x+m\int_\eta^b g(x)\mathrm{d}x$.

5. **证明**:不妨设函数 $f(x)$ 为$[a,b]$上的递减函数,则

$$m=\inf_{x\in[a,b]}f(x)=f(b),M=\sup_{x\in[a,b]}f(x)=f(a)$$

代入到上题结论即得本题结果.当 $f(x)$ 为$[a,b]$上的递增函数时同理可证.

思考题 4.3 答案

1. **答案**:(1)$I_1=0$;(2)$I_2=0$.

2. **答案**:$-\dfrac{2}{5}$.

4. (1) **答案**:$I=\dfrac{\pi}{42}$.

(2) **答案**:令 $x=u,y-z=\sqrt{2}v,z=w$, $|J|=\sqrt{2}$. $I=0$.

5. **答案**:(1)$V=\dfrac{a^2bc\pi}{3h}$.

(2) 在变换 $x=au^3,y=bv^3,z=cw^3$, $|J|=27abcu^2v^2w^2$ 下,所围区域为:$u^2+v^2+w^2\leqslant1,V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant1}27abcu^2v^2w^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$. 再做球面坐标变换 $u=r\sin\varphi\cos\theta,v=r\sin\varphi\sin\theta,w=r\cos\varphi$, $|J|=r^2\sin\varphi$.

6. **证明**:对作 $I(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 球面坐标变换

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z=r\cos\varphi,\text{则 }0\leqslant r\leqslant t,0\leqslant\theta\leqslant2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi$$

$$I(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

对二重积分 $J(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}(x^2+y^2)f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 作极坐标变换

$$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,\text{则 }0\leqslant r\leqslant t,0\leqslant\theta\leqslant2\pi$$

$$J(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^t f(r^2)r^3\mathrm{d}r$$

于是,对于 $t>0,g'(t)=\dfrac{I'(t)J(t)-I(t)J'(t)}{[J(t)]^2}=\dfrac{t^2f(t^2)\int_0^t r^2(r-t)f(r^2)\mathrm{d}r}{[J(t)]^2}$ <0,故 $g(t)$ 是$(0,+\infty)$严格单调函数.

思考题 4.4 答案

1. **答案**:$4\pi a(\dfrac{1}{3}a^2+1)$.

2. **答案**:$I = 2\pi$.

3. **答案**:$A = 2\pi$.

4. **答案**:$u(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} + C$.

5. **答案**:$u(x,y,z) = \arctan\dfrac{z}{x} - \dfrac{z}{xy} + C$.

6. **答案**:$I = 2\pi b(\sqrt{a^2+b^2} - b)$.

思考题 4.5 答案

1. **答案**:$I = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi^2}{4}$.

2. **答案**:$I = \dfrac{8\pi}{3}(a+b+c)$.

3. **答案**:$I = 1$.

4. **答案**:$I = \pi R r^2$.

5. **答案**:$I = \dfrac{1}{2}|a||b|c$.

参考文献

[1] 刘广云.数学分析选讲(第二版)[M].黑龙江:黑龙江教育出版社,2000

[2] 裴礼文.数学分析中的典型问题与方法[M].北京:高等教育出版社,1993

[3] 谢惠民,恽自求,易法槐,等.数学分析习题课讲义[M].北京:高等教育出版社,2004

[4] 刘玉琏,傅沛仁,林玎,等.数学分析讲义(第五版)[M].北京:高等教育出版社,2008

[5] 华东师范大学数学系.数学分析(上下册)[M].北京:高等教育出版社,2010

[6] 林源渠,方企勤.数学分析解题指南[M].北京:北京大学出版社,2003

[7] 徐新亚,夏海峰.数学分析选讲[M].上海:同济大学出版社,2008

[8] 李克典,马云苓.数学分析选讲[M].厦门:厦门大学出版社,2006

[9] 杨传林.数学分析解题思想与方法[M].杭州:浙江大学出版社,2008

[10] 陈守信.数学分析总复习[M].北京:机械工业出版社,2011

[11] 周民强.数学分析习题演练[M].北京:科学出版社,2006

[12] 严子谦,尹景学,张然.数学分析中的方法与技巧[M].北京:高等教育出版社,2009

[13] 宋国柱.分析中的基本定理和典型方法[M].北京:科学出版社,2004

[14] 李成章,黄玉民.数学分析(上)(第二版)[M].北京:科学出版社,2007

[General Information]
书名=数学分析选讲
作者=黄金莹，谢颖主编；赵宇，董庆超副主编；宋文主审
页数=218
SS号=13619102
DX号=
出版日期=2014.07
出版社=西安交通大学出版社